Inferenzverfahren für dynamische Fuzzy-Systeme[1]

Elmar Schäfers, Volker Krebs, Klaus Schmid

Universität Karlsruhe (T.H.), Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
Kaiserstr. 12, 76131 Karlsruhe
Tel. 0721/608-3179, Fax 0721/608-2707
e-mail: schaefer@irs.etec.uni-karlsruhe.de

Kurzfassung

Ein mathematisches Prozeßmodell stellt Beziehungen zwischen den Größen her, die für die spätere Anwendung als wesentlich angenommen werden. Sollen darüber hinaus Aussagen über die Modellgenauigkeit oder über Einflüsse von Störungen in die mathematische Prozeßbeschreibung integriert werden, ist dazu eine Beschreibungsform erforderlich, die auch die Verläßlichkeit einer Information auszudrücken vermag.

Informationen, die mit einer Ungenauigkeit behaftet sind, können durch sprachliche Konstrukte verständlich beschrieben werden. Kausalzusammenhänge sind sprachlich als Wenn-Dann-Regeln faßbar; um damit ungenaues Wissen über das Verhalten eines Prozesses darzustellen, ist ein geeigneter mathematischer Formalismus erforderlich. Dieser ist im allgemeinen ein Fuzzy-Inferenzverfahren, das linguistische Terme einem Regelsatz entsprechend verarbeiten kann. In Verbindung mit externer Dynamik läßt sich damit ein unscharfes, dynamisches Prozeßmodell erstellen.

Wird die Ausgangsgröße eines solchen unscharfen dynamischen Prozeßmodells *ohne Defuzzifizierung* rückgekoppelt, muß das verwendete Fuzzy-Inferenzverfahren einige Forderungen erfüllen, die nachfolgend herausgearbeitet werden. Damit sollen *Grundlagen einer Systemtheorie* geschaffen werden, die sowohl die Analyse linguistisch beschriebener dynamischer Prozesse ermöglicht als auch der Regelungssynthese anhand einer solchen unscharfen Systembeschreibung den Weg bereitet.

Ein weiterer Schwerpunkt dieses Beitrags liegt in der allgemeinen Beschreibung eines neuen Inferenzverfahrens, das die Einhaltung der zuvor erläuterten Forderungen gewährleistet und sich daher als Inferenzverfahren für dynamische Fuzzy-Systeme eignet. Diese sogenannte Inferenz mittels interpolierender Regeln nutzt zur Auswertung eines Regelsatzes nicht nur das explizite, in Form der Wenn-Dann-Regeln gegebene Wissen, sondern erzeugt aus den ursprünglichen Regeln weitere interpolierende Regeln, die als implizites Wissen eines Regelsatzes interpretierbar sind. Damit bietet sich dieses Verfahren auch zur Auswertung von Regelsätzen mit spärlich besetzten Regelbasen an, für die herkömmliche Inferenzverfahren nur nach einer vorhergehenden geeigneten Ergänzung des Regelsatzes zur Anwendung kommen können.

Abschließend wird gezeigt, daß die in [1] beschriebene Inferenz mittels linear interpolierender Regeln eine spezielle Ausprägung des hier vorgestellten allgemeinen Inferenzverfahrens ist, die bereits das Potential, das eine Systemtheorie für dynamische Fuzzy-Systeme in sich trägt, erkennen läßt: So wurden in [1], [2] Ansätze zur Analyse dyna-

[1] Diese Arbeit wird von der DFG unter Kr 949/5 gefördert

mischer Fuzzy-Systeme beschrieben, während in [2] und [3] ein Reglerentwurfsverfahren vorgestellt wurde, dessen Ergebnis ein vollständiger Regelsatz mit entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen ist. Dieser Regelsatz kann auch mit konventionellen Inferenzverfahren ausgewertet werden und ist daher direkt mit Hilfe standardisierter industrieller Fuzzy-CAE-Tools implementierbar.

1 Einleitung

Zur Beschreibung verschiedener Wissensformen werden mathematisch unterschiedliche Formalismen angewandt:

So liefern beispielsweise Differentialgleichungen, bei bekannten Anfangsbedingungen und Eingangsgrößen, eine Aussage über die zeitlichen Verläufe der interessierenden Prozeßgrößen. Um den Modellierungsaufwand zu reduzieren, werden Modelle möglichst geringer Komplexität angesetzt, weshalb die simulierten Zeitverläufe nicht exakt, sondern lediglich tendenziell mit den beobachteten Signalen übereinstimmen. Allerdings spiegelt sich in einem solchen Modell nicht wider, mit welcher Genauigkeit sich daraus Aussagen über das Prozeßverhalten erschließen lassen.

Nicht-deterministisches Wissen wird oftmals mit stochastischen Methoden beschrieben. Zu deren Anwendung müssen jedoch aus Gründen der mathematischen Handhabbarkeit Annahmen getroffen werden, die bei praktischen Problemstellungen entweder nur näherungsweise erfüllt sind, wie der Ansatz einer bestimmten Wahrscheinlichkeitsverteilung für die unsicheren Größen, oder die nicht nachprüfbar sind, wie beispielsweise die Ergodenhypothese. Daher liefert die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die für eine unsichere Systemgröße mit stochastischen Methoden gewonnen wird, auch keine Aussage über deren eigentliche Ungenauigkeit.

Mit dynamischen Fuzzy-Systemen erschließt sich eine neue Systemklasse der Modellierung dynamischer Systeme, die eine sinnvolle Ergänzung zu den bestehenden Modellformen darstellt. Mit Hilfe unscharfer Mengen läßt sich ungenaues Wissen passend modellieren, weil eine als Möglichkeitsverteilung aufgefaßte Fuzzy-Menge den Werten des Grundbereichs einen Möglichkeitsgrad zuordnet, der in seiner Interpretation keine so weitreichende Folgerungen wie eine Wahrscheinlichkeitsaussage zuläßt. Eine unscharfe Menge als Modellausgangsgröße erscheint deshalb in vielen Fällen als eine dem Wissen über den Prozeß und den Kenntnissen über die einwirkenden Störgrößen angemessenere Aussage als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Ein Modell stellt grundsätzlich keine unabhängig vom Menschen objektivierbare Qualität dar, sondern ist lediglich ein Ansatz, um die dem Menschen zugängliche Erfahrungswelt mit der Mathematik als Ausdrucksform zu strukturieren. Bei der Modellbildung werden verschiedene Formen menschlichen Erfahrungswissens, beispielsweise Meßdaten in Verbindung mit Strukturannahmen (z. B. Linearität), genutzt. Durch Fuzzy-Logik wird linguistisches Wissen, mithin eine Wissensform, die den Menschen als Quelle des Wissens erkennen läßt, zugänglich: So bietet ein dynamisches Fuzzy-System die mathematische Umsetzung unscharfer Wenn-Dann-Regeln, die das ungenaue Wissen über das dynamische Verhalten eines Systems beschreiben. Eine solche Wissensbasis verlangt eine adäquate Form der Wissensverarbeitung, nämlich ein geeignetes Inferenzverfahren, dessen nähere Spezifikation Thema dieses Beitrags ist.

In [1], [2] wurde bereits ausführlich eine wesentliche Eigenschaft herausgearbeitet, die ein Inferenzverfahren zur Beschreibung dynamischer Fuzzy-Systeme aufweisen muß: Orientiert man sich an der menschlichen Schlußweise, so ist lediglich die Verarbeitung interpretierbarer unscharfer Mengen sinnvoll. Daher muß die Ausgangsgröße eines dynamischen Fuzzy-Systems eine interpretierbare unscharfe Menge sein, da sie in zeitlich folgenden Schritten als Eingangsgröße der Inferenz verwendet wird. Deshalb hat ein geeignetes Inferenzverfahren die Eingangsgrößen, die als interpretierbare unscharfe Mengen vorausgesetzt werden, wieder auf solche abzubilden.

Bevor auf weitere Forderungen an ein geeignetes Inferenzverfahren eingegangen wird, werden im folgenden Kapitel 2 einige Begriffe und Definitionen vorgestellt, die die formale Darstellung der weiteren Betrachtungen vereinfachen. In Kapitel 3 werden dann unverzichtbare Eigenschaften geeigneter Inferenzverfahren erläutert. Kapitel 4 beschreibt zunächst eine mögliche Interpretation von linguistischen Regeln, auf deren Grundlage dann die den Anforderungen aus Kapitel 3 genügende "Inferenz mittels interpolierender Regeln" in allgemeiner Form eingeführt wird. Als Spezialfall wird noch auf die bereits in [1],[2] vorgestellte Inferenz mittels linear interpolierender Regeln eingegangen, bevor eine Zusammenfassung diesen Beitrag beschließt.

2 Definitionen und Begriffe

Die Interpretierbarkeit ist eine im Zusammenhang mit dynamischen Fuzzy-Systemen notwendige Eigenschaft unscharfer Mengen, die zunächst definiert werden soll. Im allgemeinen kann die Zugehörigkeitsfunktion $\mu_M(x)$ einer unscharfen Menge M, solange sie sich im Intervall $[0, 1]$ bewegt, beliebiger Form sein. Eine interpretierbare unscharfe Menge wird *hier* dadurch gekennzeichnet, daß sie genau *ein Element mit der Zugehörigkeit 1* aufweist und darüber hinaus *streng konvex* ist. Das Element mit der Zugehörigkeit 1, der Center, entspricht dem sogenannten "Prototypen" [4], auf den die Eigenschaft, die dieser unscharfen Menge zugeschrieben wird (z. B. "Temperatur ungefähr 30°C"), uneingeschränkt zutrifft. Strenge Konvexität ist dann gewährleistet, wenn $\mu_M(x)$ links vom Prototypen streng monoton ansteigt und rechts vom Prototypen streng monoton fällt. Eine formale Definition der Konvexität findet man in [5].

Weiterhin soll die Zugehörigkeitsfunktion einer interpretierbaren unscharfen Menge auf einem *kontinuierlichen, endlichen Grundbereich definiert* sein und einen *stetigen Verlauf* haben. Unstetigkeiten von Zugehörigkeitsfunktionen sind Ausdruck äußerst präzisen Wissens, das in den betrachteten linguistischen Formulierungen nur in Form eines einzigen scharfen Wertes vorkommen soll, der sich durch ein Singleton darstellen läßt. Lediglich *Singletons* gehören daher trotz ihrer unstetigen Zugehörigkeitsfunktion zu den interpretierbaren unscharfen Mengen.

Für eine unscharfe Menge, deren Zugehörigkeitsfunktion als Möglichkeitsverteilung interpretiert wird und damit den Grad der Möglichkeit für das Auftreten eines bestimmten Ereignisses angibt, kann ein *Informationsgehalt* Info(M;X) bestimmt werden. Ein Singleton ordnet genau einem Element des Grundbereichs einen Möglichkeitsgrad ungleich Null zu und erhält deshalb den höchsten Informationsgehalt von Eins. Steigt bei einer normalen unscharfen Menge der Möglichkeitsgrad für Elemente des Grundbereichs, sinkt der Informationsgehalt dieser unscharfen Menge. Können anhand einer unscharfen Menge keinerlei Präferenzen für das Auftreten irgendwelcher Werte abgeleitet werden, ist der Informationsgehalt gleich Null. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes Element des Grundbereichs einen Möglichkeitsgrad von Eins erhält und damit jeder Wert gleichermaßen möglich ist. Als ein Maß für den *Informationsgehalt* Info(M;X), das diese Randbedingungen einhält, bietet sich die Beziehung

$$\mathrm{Info}(M;\mathrm{X}) = 1 - \frac{1}{b-a}\int_a^b \mu_M(x)dx \tag{1}$$

an. M ist eine normale unscharfe Menge, die als Möglichkeitsverteilung interpretiert wird und deren Zugehörigkeitsfunktion $\mu_M(x)$ auf dem Grundbereich X = [a, b] definiert ist.

Für Funktionen, die unscharfe Mengen wieder auf unscharfe Mengen abbilden, ist der Begriff der Stetigkeit geeignet zu definieren. Mit der Stetigkeit bezüglich einer Eingangsgröße ist die Vorstellung verbunden, daß eine kleine Änderung einer Eingangsgröße nur eine kleine Änderung der Ausgangsgröße bewirken darf. Wird für eine bestimmte unscharfe Ausgangsgröße ein beliebig kleines $\epsilon > 0$ vorgegeben, das einen ϵ-Schlauch um die Zugehörigkeitsfunktion der Ausgangsgröße festlegt, so läßt sich immer ein $\delta > 0$ finden, das einen δ-Schlauch um die Zugehörigkeitsfunktion der Eingangsgröße definiert, in dem die Eingangsgröße variieren kann, ohne daß die Zugehörigkeitsfunktion der Ausgangsgröße den vorgegebenen ϵ-Schlauch verläßt. Ähnlich läßt sich auch die Stetigkeit einer Funktion bezüglich eines unscharfen Parameters, von dem die Funktion abhängt, beschreiben. Dies kommt in folgender Definition zum Ausdruck:

Definition 2.1 (Stetigkeit)
G sei eine Funktion, die unscharfe Eingangsgrößen auf eine unscharfe Ausgangsgröße $\mathcal{N}$ abbildet und die von unscharfen Parametern abhängen kann.

$\mathcal{M} = M_0$ sei eine unscharfe Eingangsgröße oder ein unscharfer Parameter mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{M_0}(x)$. Durch die Abbildung

$$N_0 = G\Big|_{\mathcal{M} = M_0}$$

wird M_0 die unscharfe Ausgangsgröße $\mathcal{N} = N_0$ mit der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_{N_0}(y)$. zugeordnet. Alle weiteren Eingangsgrößen oder Parameter seien beliebig, aber fest gewählt. Die Funktion G ist <u>stetig in M_0</u>, wenn

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ |\mu_{M_0}(x) - \mu_{M_0^*}(x)| \ < \ \delta,\ |\mu_{N_0}(y) - \mu_{N_0^*}(y)| \ < \ \epsilon$$

gilt, wobei $N_0^* = G\Big|_{\mathcal{M}=M_0^*}$ eine frei vorgebbare unscharfe Menge ist, deren Zugehörigkeitsfunktion sich im ϵ-Schlauch um $\mu_{N_0}(y)$ befindet und die durch Anwendung der Funktion G auf $\mathcal{M} = M_0^*$ entsteht. G ist <u>stetig in $\mathcal{M}$</u>, wenn obige Aussage für beliebige M_0 gilt.

Während für reelle Zahlen eine Ordnung existiert, die die Anwendung der Vergleichsoperatoren (bspw. $<, >$) ermöglicht, sind für unscharfe Zahlen oder interpretierbare unscharfe Mengen vergleichende Aussagen wie *"M ist kleiner als M^*"* nicht ohne weiteres möglich. Aus der Literatur sind verschiedene "ranking methods" bekannt [6], von denen einige mittels Ordnungsfunktionen unscharfe Mengen auf die Menge der reellen Zahlen abbilden, wo eine natürliche Ordnung vorhanden ist. In [7] werden Anforderungen genannt, die eine Ordnungsfunktion $\mathrm{O} : \mathcal{P} \longmapsto \mathbb{R}$ hierzu erfüllen muß.

Eine mögliche Ordnungsfunktionen $\mathrm{O}(A)$ für interpretierbare unscharfe Mengen $A \in \mathcal{P}$ ergibt sich beispielsweise durch Betrachtung des Centers: Die Ordnung resultiert aus der Lage des Prototypen der interpretierbaren unscharfen Menge zu $\mathrm{O}_C(A) = \mathrm{center}(A)$. Auch der Flächenschwerpunkt der Zugehörigkeitsfunktion $\mu_A(x)$ kann als Ordnungsfunktion verwendet werden.

Mit solchermaßen definierten Ordnungsfunktionen kann nun der Begriff der *Nähe* eingeführt werden, der eine Aussage über die relative Lage einer interpretierbaren unscharfen Menge bezüglich zweier anderer ermöglicht. Die Nähe N einer unscharfen Menge E zu einer anderen Menge A kann nur mit einer weiteren Referenzmenge B beurteilt werden. Eine mögliche Nähe $N_I(E; A, B)$ der Menge E zur Menge A bezüglich der Menge B (wobei A und B unterschiedlicher Ordnung sind) kann wie folgt festgelegt werden:

$$N_I(E; A, B) = \frac{O_C(B) - O_C(E)}{O_C(B) - O_C(A)} = \frac{c_B - c_E}{c_B - c_A}$$

Diese Nähe N_I erfüllt alle notwendigen Randbedingungen nach [7], wie beispielsweise $N_I(A; A, B) = 1$ oder $N_I(B; A, B) = 0$.

Schließlich wird noch mit dem Begriff der *Situation* eine abkürzende Schreibweise eingeführt, die den Umgang mit Fuzzy-Systemen mit mehreren Eingangsgrößen, die als UND-Verknüpfung im Wenn-Teil der Regel auftreten, erleichtert:

Definition 2.2 (Situation)
Eine Situation $\mathcal{S}$ ist ein geordnetes n-Tupel unscharfer Mengen,

$$\mathcal{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_n).$$

Es seien n linguistische Variablen $\mathcal{E}_i$ gegeben. M_i sei jeweils eine unscharfe Menge, durch die ein linguistischer Wert von $\mathcal{E}_i$ beschrieben wird. Dann ist die Situation

$$\mathcal{S} = (M_1, M_2, \ldots, M_n)$$

gleichbedeutend mit der linguistischen Aussage n-ter Ordnung

$$\text{„}\mathcal{E}_1 = M_1 \quad UND \quad \mathcal{E}_2 = M_2 \quad UND \quad \cdots \quad UND \quad \mathcal{E}_n = M_n\text{“}.$$

Zwei Situationen $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ und $\mathcal{S}^* = (S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*)$ werden als gleich bezeichnet, wenn ihre n Komponenten paarweise gleich sind,

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^* \quad \Longleftrightarrow \quad S_i = S_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Die Situation $\mathcal{S}$ heißt in der anderen Situation $\mathcal{S}^*$ enthalten, wenn die Komponenten paarweise ineinander enthalten sind,

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^* \quad \Longleftrightarrow \quad S_i \subseteq S_i^*, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Der Begriff der Nähe, der bereits für den eindimensionalen Fall erläutert wurde, kann für mehrdimensionale Betrachtungen, nämlich für die Nähe von Situationen, erweitert werden [7]. Die Nähe einer Situation $\mathcal{S} = (S_1, S_2, \ldots, S_n)$ zu einer Situation $\mathcal{S}^* = (S_1^*, S_2^*, \ldots, S_n^*)$ bezüglich der Situation $\mathcal{S}^{**} = (S_1^{**}, S_2^{**}, \ldots, S_n^{**})$ kann durch das Produkt aller eindimensionalen Nähen beschrieben werden:

$$N(\mathcal{S}; \mathcal{S}^*, \mathcal{S}^{**}) = N(S_1; S_1^*, S_1^{**}) \cdot N(S_2; S_2^*, S_2^{**}) \cdot \ldots \cdot N(S_n; S_n^*, S_n^{**})$$

Die soweit eingeführten Begriffe und Definitionen erlauben es, im folgenden Kapitel näher auf die Forderungen einzugehen, die ein Inferenzverfahren zu erfüllen hat, wenn es zur Beschreibung eines Fuzzy-Systems herangezogen werden soll, dessen unscharfe Ausgangsgröße weiterverarbeitet wird.

3 Allgemeine Forderungen an Inferenzverfahren für dynamische Fuzzy-Systeme

Ein Fuzzy-Inferenzverfahren IV bildet n unscharfe Eingangsgrößen E_i entsprechend einem zugrunde liegenden Regelsatz auf eine unscharfe Ausgangsgröße Y ab. Die erste Forderung nach Interpretierbarkeit der Ausgangsgrößen wurde bereits in der Einleitung motiviert:

Forderung 3.1 (Interpretierbarkeit) *Die durch das Inferenzverfahren aus den interpretierbaren unscharfen Eingangsgrößen berechneten Ausgangsgrößen müssen interpretierbare unscharfe Mengen sein.*

Diese oben genannte Forderung wird beispielsweise bei der Methode der Aktivierungsgrade, dem Inferenzverfahren, das in Fuzzy-Reglern implementiert ist, nicht erfüllt, weil die Attraktivitätsfunktion im allgemeinen keine interpretierbare unscharfe Menge ist. Diese wohl bekannteste Inferenzmethode scheidet deshalb als mögliches Verfahren für die hier betrachtete Anwendung aus.

Wenn sich die dem menschlichen Schlußfolgern zugrunde liegenden Eingangsgrößen wenig ändern, bewirkt dies, daß sich auch die Ausgangsgröße nur wenig ändert. Betrachtet man eine feste Eingangsgröße, so würde sich auch bei einer kleinen Änderung des Erfahrungswissens die Ausgangsgröße kaum ändern. Die Abbildung des Eingangs auf den Ausgang weist also Stetigkeit auf, sowohl in den Eingangsgrößen selbst als auch in der Nutzung des gespeicherten Wissens. Das mathematische Inferenzverfahren muß diese Eigenschaften daher ebenfalls besitzen; mit der Stetigkeitsdefinition 2.1 ergeben sich die beiden folgenden Forderungen:

Forderung 3.2 (Stetigkeit der Abbildung) *Das Inferenzverfahren muß stetig in allen Eingangsgrößen sein.*

Forderung 3.3 (Stetigkeit des gespeicherten Wissens) *Eine kleine Änderung des gespeicherten Wissen, also eine geringfügige Modifikation des Regelsatzes, darf nur zu einer kleinen Änderung des Ergebnisses der Inferenz führen. Das Inferenzverfahren hat deshalb stetig in allen Prämissen und Konklusionen des Regelsatzes zu sein.*

Wenn sich der Informationsgehalt einer Eingangsgröße verringert, wenn also das Wissen über die tatsächliche Situation unsicherer wird, dann kann sich die Sicherheit der Schlußfolgerung nicht erhöhen. Eine Verringerung des Informationsgehaltes am Eingang kann also keine Erhöhung des Informationsgehaltes am Ausgang bewirken. Dies gilt allerdings nur dann, wenn die verglichenen Eingangsgrößen die gleiche Eigenschaft beschreiben, sich aber in der Unschärfe unterscheiden. Zwei interpretierbare unscharfe Mengen beschreiben genau dann die gleiche Eigenschaft, wenn ihre beiden Prototypen – also ihre Center – identisch sind. Damit kann der bereits definierte Informationsgehalt unscharfer Mengen verwendet werden, um diese Forderung nach einer Berücksichtigung des Informationsgehaltes auf das Inferenzverfahren zu übertragen.

Forderung 3.4 (Informationsgehalt) *Steigt der Informationsgehalt einer Eingangsgröße bei gleichbleibendem Center, darf der Informationsgehalt der Ausgangsgröße nicht* *abnehmen. Sinkt der Informationsgehalt einer Eingangsgröße bei gleichbleibendem Center, so kann der Informationsgehalt der Ausgangsgröße nicht zunehmen.*

Dies ist gleichbedeutend mit folgender Aussage: Sind alle Zahlenwerte, die in der Situation $\mathcal{S}$ zu einem gewissen Grad möglich sind, in der Situation $\mathcal{S}^*$ mindestens zu demselben Grad möglich, dann müssen auch alle Zahlenwerte, die in der Ausgangsgröße $Y = \mathrm{IV}(\mathcal{S})$ möglich sind, in der Ausgangsgröße $Y^* = \mathrm{IV}(\mathcal{S}^*)$ mindestens genauso möglich sein:

$$\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^* \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{IV}(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{IV}(\mathcal{S}^*). \tag{2}$$

Einem Inferenzverfahren, das die soweit formulierten Forderungen einhält, fehlt allerdings noch eine wesentliche Eigenschaft: Ein Bezug zum Regelsatz, der durch diese Inferenzmethode mathematisch ausgewertet werden soll. Randbedingungen, die ein solcher Bezug zum Regelsatz in Zusammenhang mit den bereits aufgeführten Bedingungen einhalten muß, finden sich in der folgenden Forderung:

Forderung 3.5 (Bezug zum Regelsatz)

1. **Identität:** *Stimmt der Wert E_i einer Eingangsgröße mit einer Prämisse der entsprechenden linguistischen Variablen $\mathcal{E}_i$ überein, so brauchen nur diejenigen Regeln betrachtet zu werden, die diese Prämisse in ihrer Bedingung enthalten.*

   Stimmt die gesamte Eingangssituation $\mathcal{S}$ mit der Bedingung $\mathcal{S}_k$ einer Regel überein, so ist die Ausgangsgröße gleich der Konklusion dieser Regel:

$$\mathrm{IV}(\mathcal{S}_k) = K_k. \tag{3}$$

2. **Zusatzinformation:** *Ist eine Eingangsgröße E_i in einer Prämisse P^{j_i} der entsprechenden linguistischen Variablen $\mathcal{E}_i$ enthalten, so enthält die Eingangsgröße mehr Information als im Regelsatz vorgesehen ist. Diese zusätzliche Information soll deshalb nicht berücksichtigt werden:*

$$E_i \subseteq P^{j_i} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{IV}(E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_n) = \mathrm{IV}(E_1, \ldots, P^{j_i}, \ldots, E_n). \tag{4}$$

3. **Monotonie:** *Sind auf einer Eingangsgröße $\mathcal{E}_i$ nur die beiden Prämissen A_i und B_i definiert und wird – bei ansonsten konstanten Eingangsgrößen E_j, $j \neq i$ – der Eingangsgröße $\mathcal{E}_i$ einmal der Wert E_i mit $Y = \mathrm{IV}(E_i)$, dann der Wert E_i^* mit $Y^* = \mathrm{IV}(E_i^*)$ zugeordnet, so muß mit $Y_A = \mathrm{IV}(A_i)$ und $Y_B = \mathrm{IV}(B_i)$ folgendes gelten:*

$$N(E_i, A_i, B_i) > N(E_i^*, A_i, B_i) \Longrightarrow N(Y, Y_A, Y_B) \geq N(Y^*, Y_A, Y_B).$$

Die in der Forderung 3.5 aufgeführten Bedingungen sind bereits eine von vielen möglichen Interpretationen eines Regelsatzes, die vor allem in Verbindung mit den übrigen Forderungen sinnvoll sind. Bevor eine darüber hinausgehende Interpretation eines Regelsatzes in Kapitel 4 vorgestellt wird, werden im folgenden Abschnitt einige weitere Aussagen angegeben, die sich anhand der allgemeinen Forderungen herleiten lassen.

3.1 Konsequenzen aus den allgemeinen Forderungen

Die erste aufgeführte Folgerung bringt eine nicht leicht sichtbare, aber weitreichende Erkenntnis zum Ausdruck:

Satz 3.1 (Center der Ausgangsgröße)
Der Center der Ausgangsgröße ist durch die Center der Eingangsgrößen eindeutig festgelegt. Er hängt nicht von der Form der Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgrößen ab.

Dies bedeutet, daß jedes geeignete Inferenzverfahren implizit eine Abbildungsvorschrift beinhaltet, die den Center der Ausgangsgröße einzig anhand der Center der Eingangsgrößen eindeutig festlegt! In [8] wird ein Verfahren vorgestellt, bei dem sich der Center der Ausgangsgröße anhand der Äste[2] der Eingangsgrößen ergibt, was Satz 3.1 widerspricht und auch bedeutet, daß Forderung 3.4, anhand derer sich obiger Satz herleiten läßt, verletzt wird.

Weitere Folgerungen lassen zusätzliche Randbedingungen erkennen:

Satz 3.2 (Verlust von Zusatzinformation)
Ist die Eingangssituation $\mathcal{S}$ in der Bedingung der k-ten Regel $\mathcal{S}_k$ enthalten, so ist die Ausgangsgröße gleich der Konklusion K_k dieser Regel.

Satz 3.3 (Begrenzung des Informationsgehaltes durch den Regelsatz)
Ist die Bedingung $\mathcal{S}_k$ der k-ten Regel in der Eingangssituation $\mathcal{S}$ enthalten, so ist die Konklusion K_k dieser Regel in der Ausgangsgröße enthalten.

Satz 3.4 (Centergleichheit mit Prämisse)
Stimmt der Center einer Eingangsgröße E_i mit dem Center einer Prämisse P^{j_i} dieser Eingangsgröße überein, dann ist eine Ausgangsgröße, die folgen würde, wenn die Eingangsgröße E_i gleich *dieser Prämisse P^{j_i} wäre, in der Ausgangsgröße enthalten:*

$$\mathrm{IV}(E_1, \ldots, P^{j_i}, \ldots, E_n) \subseteq \mathrm{IV}(E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_n).$$

4 Inferenz mittels interpolierender Regeln

Während bisher allgemeine Aussagen über geeignete Inferenzverfahren getroffen wurden, wird nun genauer auf eine mögliche Interpretation eines Regelsatzes eingegangen. Am Beispiel eines Regelsatzes mit den beiden Regeln

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn } \textit{Temperatur } T \text{ „}\textit{sehr niedrig}\text{“} & \text{Dann } \textit{Ventil } \varphi \text{ „}\textit{weit auf}\text{“} \\ \text{Wenn } \textit{Tempertatur } T \text{ „}\textit{sehr hoch}\text{“} & \text{Dann } \textit{Ventil } \varphi \text{ „}\textit{zu}\text{“} \end{array} \tag{5}$$

soll eine mögliche Interpretation, die auch zur Auswertung von Regelsätzen mit spärlich besetzten Regelbasen geeignet ist, erläutert werden. Bild 1 zeigt die Zugehörigkeitsfunktionen der Prämissen und Konklusionen. Mit herkömmlichen Inferenzmethoden, beispielsweise der Methode der Aktivierungsgrade, läßt sich der Regelsatz für Temperaturen wie

[2] Unter dem linken (bzw. rechten) Ast versteht man hier den Teil der Zugehörigkeitsfunktion einer interpretierbaren unscharfen Menge, der links (bzw. rechts) des Centers verläuft.

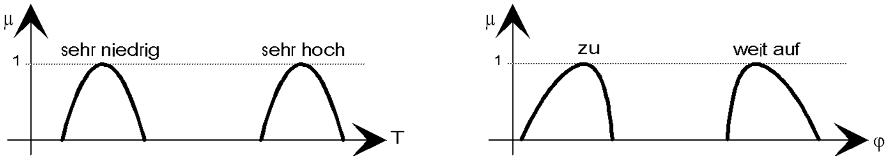

Abbildung 1: Prämissen und Konklusionen der beiden Regeln

"mittel" , deren Zugehörigkeitsfunktion zwischen den Prämissenzugehörigkeitsfunktionen liegt, erst auswerten, wenn der Regelsatz durch weitere Regeln ergänzt wird. Beispielsweise schaffen die zusätzlichen Regeln

$$\begin{array}{ll} \text{Wenn } T = \text{„}\textit{niedrig}\text{“} & \text{Dann } \varphi = \text{„}\textit{auf}\text{“} \\ \text{Wenn } T = \text{„}\textit{mittel}\text{“} & \text{Dann } \varphi = \text{„}\textit{mittel}\text{“} \\ \text{Wenn } T = \text{„}\textit{hoch}\text{“} & \text{Dann } \varphi = \text{„}\textit{fast zu}\text{“} \end{array} \tag{6}$$

mit den entsprechenden Zugehörigkeitsfunktionen aus Abbildung 2 eine vollständige Überdeckung des Grundbereichs der Eingangsgröße. Bei dieser Erweiterung des Regelsatzes wurde die Interpretation, die auch der Inferenz mittels interpolierender Regeln zugrunde liegt, bereits verwendet. Um den Regelsatz mit Hilfe der Methode der Aktivierungsgrade auswerten zu können, mußte ein Teil des bereits in den beiden Regeln (5) *implizit* enthaltenen Wissens in Form der Regeln (6) *explizit* aufgeführt werden.

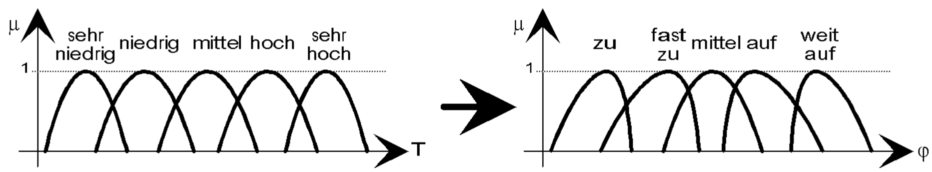

Abbildung 2: Mit unscharfen Mengen überdeckter Grundbereich

Bei der Inferenz mittels interpolierender Regeln werden nun, anstatt sehr viele Regeln fest im Regelsatz abzulegen, aus wenigen ursprünglichen Regeln nur diejenigen Regeln, die für die Inferenz letztendlich benötigt werden, durch das Inferenzverfahren selbst erzeugt. Die Bedingungen der vorhandenen expliziten Regeln sind die Stützstellen, die Konklusionen die Stützwerte, aus denen durch eine Art Interpolation die sogenannten interpolierenden Prämissen und die interpolierenden Konklusionen bestimmt werden. In den folgenden Unterabschnitten wird auf die Bestimmung dieser interpolierenden Prämissen und Konklusionen eingegangen. Sie bilden interpolierende Regeln, deren Auswertung in Abschnitt 4.3 erläutert wird.

Das bereits in [1], [2] vorgestellte Inferenzverfahren ist ein Spezialfall des hier eingeführten Verfahrens und wird im folgenden als "Inferenz mittels linear interpolierender Regeln" bezeichnet. Ein Interpolationsansatz wird auch in [9] verfolgt, das Verfahren genügt allerdings nicht den allgemeinen Forderungen aus Kapitel 3. [10] beschreibt eine Verbesserung dieses Verfahrens und verwendet zur Auswertung des Regelsatzes ebenfalls eine interpolierende Regel. Allerdings ist die Vorgehensweise auf Systeme mit lediglich einer Eingangsgröße beschränkt, auf deren Grundbereich zwei Prämissenzugehörigkeitsfunktionen definiert sind.

Zur Vereinfachung der weiteren Vorgehensweise wird zunächst davon ausgegangen, daß für jede Eingangsgröße $\mathcal{E}_i$ zwei Prämissen A_i und B_i definiert sind. Abschnitt 4.4 erläutert die Erweiterung auf Systeme mit mehr als zwei Prämissen pro Eingangsgröße.

4.1 Bestimmung einer interpolierenden Prämisse

Die interpolierende Prämisse wird für jede Eingangsgröße getrennt bestimmt, weshalb die Betrachtung eines Systems mit nur einer Eingangsgröße zunächst ausreicht. Die interpolierende Prämisse soll schließlich verwendet werden, um aus der aktuellen Eingangsgröße unter Verwendung der interpolierenden Konklusion die unscharfe Ausgangsgröße zu bestimmen. Wegen Satz 3.4 kann die interpolierende Konklusion nur zum Aufbau der gesuchten Ausgangsgröße verwendet werden, wenn der Center c_{IP} der interpolierenden Prämisse mit dem Center c_E der Eingangsgröße übereinstimmt. Weil die interpolierende Regel eine bereits implizit im Regelsatz vorhandene Regel sichtbar machen soll, muß die interpolierende Prämisse darüber hinaus auch von den ursprünglichen Prämissen A und B abhängen, die für die Eingangsgröße $\mathcal{E}$ definiert sind. Somit ergibt sich die interpolierende Prämisse als Funktion des Centers c_E mit den Parametern A und B zu

$$\mathrm{IP} = G_{IP}(c_E;\, A, B).$$

Diese Funktion G_{IP} darf keine beliebige Abhängigkeit von ihrer Eingangsgröße und ihren unscharfen Parametern aufweisen, sondern muß bestimmten Anforderungen genügen.

Damit das implizite Wissen dem expliziten nicht widerspricht, muß, wenn der Center der Eingangsgröße c_E mit dem Center c_A bzw. c_B einer ursprünglichen Prämisse übereinstimmt, die interpolierende Prämisse gleich einer der Prämissen A bzw. B sein.

Weiterhin ist durch einen geeigneten Bezug zu den ursprünglichen Prämissen zu gewährleisten, daß das implizite Wissen in Form interpolierender Regeln auch aus dem expliziten Wissen, den ursprünglichen Regeln, generiert wird. Deshalb gilt: Zum einen soll die interpolierende Prämisse von derselben interpretierbaren Form, beispielsweise glockenförmig oder triangulär, sein wie die ursprünglichen Prämissen. Zum anderen soll bei der Berechnung der interpolierenden Prämisse, die als interpretierbare unscharfe Menge in ihren linken und rechten Ast aufgeteilt werden kann, der *linke* (bzw. *rechte*) Ast aus den *linken* (bzw. *rechten*) Ästen der beiden Prämissen A und B bestimmt werden.

Auch muß, um eine insgesamt stetige Abbildung der Eingangsgrößen auf die Ausgangsgröße zu erreichen, G_{IP} stetig in allen Parametern und Eingangsgrößen sein.

Über die stetige Abhängigkeit vom Center der Eingangsgröße hinaus muß G_{IP} auch noch monoton von c_E abhängen, weil eine nichtmonotone Abhängigkeit nicht aus dem ursprünglichen Regelsatz hervorgehen kann und deshalb nur als Umsetzung von "Metawissen", das über die Stützregeln hinausgeht, interpretierbar wäre.

Damit sind die Randbedingungen, die eine Funktion G_{IP} zur Berechnung interpolierender Prämissen einzuhalten hat, aufgeführt. Der gleichen Vorgehensweise folgend, werden im folgenden Abschnitt Bedingungen für die Bestimmung der Konklusion einer interpolierenden Regel vorgestellt.

4.2 Bestimmung einer interpolierenden Konklusion

Mit den interpolierenden Prämissen, die auf dem Grundbereich jeder Eingangsgröße bestimmt werden, sollen schließlich weitere, den ursprünglichen Regelsatz ergänzende sogenannte interpolierende Regeln eingeführt werden. Die Konklusionen dieser Regeln werden interpolierende Konklusionen genannt; diese dürfen als implizites Wissen des ursprünglichen Regelsatzes nicht von den Eingangsgrößen, sondern nur von den ursprünglichen

Regeln abhängen. Durch den Bedingungsteil einer interpolierenden Regel soll die interpolierende Konklusion dieser Regel eindeutig festgelegt sein. Ist $\mathcal{S}_{k^*}$ die Bedingung der interpolierenden Regel, dann hängt die interpolierende Konklusion IK von der Lage der Situation $\mathcal{S}_{k^*}$ bezüglich der jeweiligen ursprünglichen Prämissen A_i und B_i und den ursprünglichen Konklusionen $K_1, \ldots, K_{2^n}$ ab:

$$\mathrm{IK} = G_{IK}\Big(\mathcal{S}_{k^*}; (A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n); K_1, \ldots, K_{2^n}\Big).$$

G_{IK} hat, wie G_{IP}, bestimmte Anforderungen zu erfüllen. So muß G_{IK} eine in allen Parametern stetige Abbildung sein, die eine interpolierende Konklusion von der gleichen interpretierbaren Form wie die ursprünglichen Konklusionen erzeugt. Deren rechte bzw. linke Äste werden nur aus den rechten bzw. linken Ästen der ursprünglichen Konklusionen gebildet. Stimmt $\mathcal{S}_{k^*}$ mit der Bedingung $\mathcal{S}_k$ einer ursprünglichen Regel überein, ist die interpolierende Konklusion gleich der Konklusion dieser ursprünglichen Regel. Ist eine Prämisse der Situation $\mathcal{S}_{k^*}$ mit einer ursprünglichen Prämisse A_i (bzw. B_i) identisch, hängt die interpolierende Konklusion entsprechend der Forderung (3) nicht von Regeln ab, die B_i (bzw. A_i) als Prämisse in ihrer Bedingung enthalten. Weiterhin soll gelten, daß die Konklusion einer ursprünglichen Regel umso stärker zur Bildung der interpolierenden Konklusion beiträgt, je näher die Bedingung der interpolierenden Regel der Bedingung dieser ursprünglichen Regel ist.

Da der Center der Ausgangsgröße nach Satz 3.1 nur von den Centern der Eingangsgrößen abhängt, ergibt sich der Center c_{IK} der interpolierenden Konklusion einzig aus den Centern der Prämissen, nicht aus deren spezieller Form. c_{IK} läßt sich anhand einer stetigen Interpolationsfunktion

$$c_{IK} = F\Big(\underline{c}_e = (c_1, c_2, \ldots, c_n)\Big) \tag{7}$$

aus den Centern c_i der Prämissen der interpolierenden Regel durch Interpolation zwischen den Centern der ursprünglichen Konklusionen ermitteln.

Soweit sind nun mit G_{IP} und G_{IK} zwei Operatoren eingeführt, von denen der erste anhand der Eingangsgrößen interpolierende Prämissen erzeugt und der zweite für die dann zusätzlich bildbaren interpolierenden Regeln die passenden interpolierenden Konklusionen ermittelt. Zur Bestimmung der Ausgangsgröße wird im folgenden diejenige interpolierende Regel verwendet, deren Bedingungsteil sich vollständig aus interpolierenden Prämissen zusammensetzt.

Schließlich bleibt noch die Auswertung der interpolierenden Regel, die aus zwei prinzipiellen Schritten besteht: Zunächst einer Modifikation der Eingangsgrößen, dann einer Verunschärfungsoperation in Abhängigkeit von den modifizierten Eingangsgrößen.

4.3 Auswertung einer interpolierenden Regel

Im ersten Schritt, der *Modifikation der Eingangsgrößen*, werden die modifizierten Eingangsgrößen $\tilde{E}_i$ durch die Vereinigung der interpolierenden Prämissen IP_i mit den ursprünglichen Eingangsgrößen E_i gewonnen:

$$\mu_{\tilde{E}_i}(x) = \max[\mu_{E_i}(x), \mu_{IP_i}(x)].$$

Eine Verschärfung der Eingangsgrößen innerhalb einer Prämisse kann nach Satz 3.2 keine Auswirkung auf die Ausgangsgröße, die aus der Verunschärfung im nächsten Schritt entsteht, haben. Die modifizierte Eingangsgröße hat, wenn sie sich von der ursprünglichen

Eingangsgröße unterscheidet, einen geringeren Informationsgehalt als diese; sie trägt nur noch die Information in sich, die vom Regelsatz tatsächlich ausgewertet werden kann. Somit vereinfacht sich der finale Schritt, die $Verunschärfungsoperation$, die nun mit den modifizierten Eingangsgrößen erfolgt.

Diese "Verunschärfung" der interpolierenden Konklusion, aus der schließlich die Ausgangsgröße y folgt, läßt sich allgemein als Abbildung V_{IR} beschreiben:

$$Y = V_{IR}(\tilde{E}_1, \ldots, \tilde{E}_n; (A_1, B_1), \ldots, (A_n, B_n), K_1, \ldots, K_{2^n}).$$

Diese Berechnungsvorschrift muß einigen Randbedingungen genügen: Neben der Stetigkeit in allen Parametern und Eingangsgrößen muß die aus V_{IR} resultierende Ausgangsgröße y von der gleichen interpretierbaren Form sein wie die Prämissen und Konklusionen des Regelsatzes. Entsprechen die modifizierten Eingangsgrößen E_i den interpolierenden Prämissen IP_i, muß die Ausgangsgröße Y gleich der Konklusion IK der interpolierenden Regel sein.

Hinzu kommen weitere Forderungen, die in [7] näher ausgeführt werden und festlegen, welche Äste der Eingangsgrößen sich verunschärfend auf die jeweiligen Äste der Ausgangsgröße auswirken. Im Falle nur einer Eingangsgröße ist dies unschwer zu erkennen, bei mehreren Eingangsgrößen sind aufwendigere Betrachtungen notwendig. In [2] wird dies am Beispiel eines Systems mit zwei Eingangsgrößen und der Inferenz mittels linear interpolierender Regeln deutlich.

Bisher wurde davon ausgegangen, daß für jede Eingangsgröße $\mathcal{E}_i$ genau zwei Prämissen A_i und B_i definiert sind. Sind mehr Prämissen vorhanden, wird das Verfahren für verschiedene sogenannte Interpolationsbereiche durchgeführt und die resultierende Ausgangsgröße anhand der Ergebnisse der einzelnen Interpolationsbereiche durch Aggregation gewonnen, wie im folgenden Abschnitt näher ausgeführt wird.

4.4 Aggregation der Interpolationsbereiche

Der einfachste Fall eines Systems mit mehreren Interpolationsbereichen ist ein System mit einer Eingangsgröße $\mathcal{E}$, auf deren Grundbereich drei Prämissen P_1, P_2 und P_3 definiert sind. Drei Regeln der Form

$$\text{Wenn } \mathcal{E} = P_i \text{ Dann } \mathcal{Y} = K_i$$

beschreiben die Abbildung. Beschränkt man sich bei der Auswertung des Regelsatzes auf jeweils einen Interpolationsbereich $\mathbb{B}_1 = \{P_1, P_2\}$ oder $\mathbb{B}_2 = \{P_2, P_3\}$, kann ein Inferenzverfahren IV, das den bisherigen Vorschriften genügt, angewendet werden, um für jeden Interpolationsbereich eine Ausgangsgröße $Y_1 = \mathrm{IV}(E; \mathbb{B}_1)$ bzw. $Y_2 = \mathrm{IV}(E; \mathbb{B}_2)$ zu generieren. Die resultierende Ausgangsgröße ergibt sich dann durch Aggregation aus den beiden Ausgangsgrößen Y_1 und Y_2.

Im allgemeinen erhält man für ein Fuzzy-System mit n Eingangsgrößen $\mathcal{E}_i$, auf denen jeweils g_i Prämissen definiert sind, $\kappa = (g_1 - 1) \cdot (g_2 - 1) \cdots (g_n - 1)$ verschiedene Interpolationsbereiche, für die die interpolierenden Regeln und die Verunschärfung getrennt berechnet werden sollen. Es entstehen dadurch κ verschiedene Ausgangsgrößen Y_l, die durch Aggregation zu einer einzigen, resultierenden Ausgangsgröße Y_{res} zusammengefaßt werden müssen. Dazu wird eine gewichtete Summe dieser Y_l verwendet:

$$Y_{res} = \sum_{l=1}^{\kappa} \mu_l \cdot Y_l.$$

Dabei ist μ_l jeweils das Gewicht, mit dem der Interpolationsbereich $\mathbb{B}_l$ bewertet wird. Die Summe der Gewichtungsfaktoren μ_l, deren Werte auf das Intervall $[0,1]$ beschränkt sind, ist konstant gleich Eins.

Darüber hinaus sind die Gewichtungsfaktoren stetige Funktionen, die lediglich von den Centern der Eingangsgrößen und nicht von deren Verlauf abhängen, da ansonsten der Center von Y_{res} ebenfalls vom Verlauf der E_i abhängen würde, was jedoch durch Satz 3.1 ausgeschlossen ist. Außerdem folgt aus der allgemeinen Forderung 3.5, daß, wenn der Center einer Eingangsgröße identisch mit dem Center einer Prämisse ist, die Gewichtungsfaktoren sämtlicher Interpolationsbereiche, die diese Prämisse nicht enthalten, verschwinden müssen.

Durch die Aggregation wird die Verarbeitung der Eingangsgrößen bei der Auswertung eines Regelsatzes durch die Inferenz mittels interpolierender Regeln abgeschlossen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird noch auf ein spezielles Verfahren, die Inferenz mittels linear interpolierender Regeln, eingegangen.

4.5 Inferenz mittels linear interpolierender Regeln

In [1] wurde bereits ein Inferenzverfahren vorgestellt, das sich in die hier vorgegebenen Rahmenbedingungen einpaßt. Dieses Verfahren wird Inferenz mittels linear interpolierender Regeln genannt, da die lineare Interpolation als Grundlage möglichst vieler Operationen Verwendung findet. So erfolgt sowohl die Bestimmung der interpolierenden Prämisse als auch der interpolierenden Konklusion und damit auch des Centers der Ausgangsgröße nach Gleichung (7) durch lineare Interpolation. Die Verunschärfung basiert ebenfalls auf linearer Interpolation, allerdings unter zusätzlicher Verwendung von Max- und Min- Operatoren [2], ohne die eine Einhaltung der hier aufgeführten Forderungen nicht möglich wäre. Die Gewichtungsfaktoren μ_l der einzelnen Interpolationsbereiche hängen zonenweise linear von den Centern der jeweiligen Eingangsgrößen ab.

5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Beitrag wurden Randbedingungen angeführt und erläutert, die ein Inferenzverfahren erfüllen muß, dessen unscharfe Ausgangsgröße ohne vorherige Defuzzifizierung weiterverarbeitet wird. Ein allgemeines Inferenzverfahren, die Inferenz mittels interpolierender Regeln, wurde hergeleitet. Damit kann sprachlich formuliertes Regelwissen als Beschreibungsgrundlage zur Modellierung dynamischer Systeme verwendet werden. Auf der Basis solcher Inferenzverfahren wird mit dynamischen Fuzzy-Systemen eine neue Systemklasse der Modellierung zugänglich. Ansätze für eine darauf gründende Systemtheorie wurden für das spezielle Verfahren "Inferenz mittels linear interpolierender Regeln" mit der Stabilitätsanalyse und einem Verfahren zur Reglersynthese bereits in [1], [2] vorgestellt. Bei zukünftigen Arbeiten steht die Identifikation von dynamischen Fuzzy-Systemen im Vordergrund.

Literatur

[1] *Elmar Schäfers:* Inferenz mittels interpolierender Regeln - ein neues Verfahren zur Beschreibung von Fuzzy-Systemen. 5. Workshop „Fuzzy-Control“ des GMA-UA 1.4.2, S. 14-27, 1995.

[2] *Elmar Schäfers, Volker Krebs, Martin Sackmann:* Dynamische Fuzzy-Systeme: Stabilitätsanalyse und Reglerentwurf. 6. Workshop „Fuzzy-Control“ des GMA-UA 1.4.2, S. 43-56, 1996

[3] *Elmar Schäfers, Volker Krebs:* Stability Analysis and Controller Design for Dynamic Fuzzy Systems based on a new Fuzzy Inference Approach. 6th IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Barcelona 1997.

[4] *Didier Dubois, Henri Prade, Ronald Yager:* Introduction to Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems. Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems, Morgan Kaufmann Publishers, S. 1-19, 1993.

[5] *Didier Dubois, Henri Prade:* Fuzzy Sets And Systems. Academic Press, 1980.

[6] *G. Bortolan, R. Degani:* A Review of some Methods for Ranking Fuzzy Subsets. Fuzzy Sets and Systems (15), S. 1-19, 1985.

[7] *Klaus Schmid:* Inferenzverfahren zur mathematischen Beschreibung dynamischer Fuzzy-Systeme. Diplomarbeit D688, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe (T.H.), 1997.

[8] *Magne Setnes, U. Kaymak, H.R. van Nauta Lemke, H.B. Verbruggen:* Fuzzy Arithmetic-Based Interpolative Reasoning. Proceedings (AIRTC) Kuala Lumpur, Malaysia, September 1997.

[9] *Lászlo T. Kóczy, Kaoru Hirota:* Approximate Reasoning by Linear Rule Interpolation and General Approximation. International Journal of Approximate Reasoning (9), S. 197-225, 1993.

[10] *Wu Zhi Qiao, Masaharu Mizumoto, Shi Yan:* An Improvement to Kóczy and Hirota's Interpolative Reasoning in Sparse Fuzzy Rule Bases. International Journal of Approximate Reasoning (15), S. 185-201, 1996.