

Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 6053

**Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität
mit Schädigung bei kleinen und großen
Deformationen**

Harald Lämmer
Institut für Materialforschung

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation

Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1998

Kurzfassung

Der vorliegende Bericht befaßt sich mit der Formulierung und Integration von Materialmodellen mit isotroper Schädigung. Basierend auf der irreversiblen Thermodynamik mit inneren Zustandsvariablen werden Materialmodelle der Thermoplastizität und Thermoviskoplastizität mit nichtlinearer isotroper und nichtlinearer kinematischer Verfestigung vorgestellt, die in thermodynamisch konsistenter Weise mit Schädigung gekoppelt sind. Die konstitutiven Gleichungen werden so formuliert, daß der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung für alle zulässigen Prozesse stets erfüllt ist.

Für drei Plastizitätsmodelle, die für kleine Deformationen formuliert und in unterschiedlicher Weise mit Schädigung gekoppelt sind, wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie diese in thermodynamisch konsistenter Form auf große Deformationen verallgemeinert werden können. Die Schädigungsentwicklung wird durch eine Evolutionsgleichung für duktile Schädigung beschrieben, die sowohl Porenbildung als auch Porenwachstum berücksichtigt. Die Verallgemeinerung der konstitutiven Gleichungen auf große Deformationen basiert auf dem sogenannten Konzept der dualen Variablen. Die Materialgleichungen unterliegen einer speziellen thermodynamischen Formulierung, deren Besonderheit einerseits in der Wahl der Verzerrungs- und Spannungstensoren sowie den zugehörigen objektiven Ableitungen, andererseits in der Modellierung der kinematischen Verfestigung liegt.

Im Hinblick auf eine effiziente numerische Umsetzung werden kleine elastische Verzerrungen und eine vereinfachte kinematische Verfestigungsregel angenommen. Für diese vereinfachte Version der Materialmodelle müssen gewisse Restriktionen erfüllt sein, damit die Clausius-Duhem-Ungleichung in hinreichender Weise befriedigt wird.

Für eine auf Thermoviskoplastizität erweiterte, vereinfachte Version wird ein effektiver, impliziter Integrationsalgorithmus vorgestellt, der auf einem Operator-Split-Verfahren basiert. Die spezielle Struktur des Differentialgleichungssystems ermöglicht eine Reduktion der mit dem Newton-Verfahren zu lösenden Gleichungen. Die konstitutiven Beiträge zur Tangentensteifigkeitsmatrix werden analytisch ermittelt.

Das vorgestellte Integrationsverfahren wurde über die Benutzerschnittstelle UMAT in das Finite Elemente Programm ABAQUS implementiert. Einige Anwendungsbeispiele für verschiebungs- und kraftgesteuerte Prozesse werden diskutiert. Im Rahmen einer gekoppelten thermomechanischen FE-Analyse wird der Einschnürvorgang einer axialsymmetrischen Zugprobe simuliert sowie das Verformungsverhalten eines mit Innendruck und Temperatur beaufschlagten dünnwandigen Zylinders untersucht.

Abstract

Small and Finite Deformation Thermoplasticity and Thermoviscoplasticity with Damage

This report deals with the formulation and numerical integration of constitutive models with isotropic damage. Based on the irreversible thermodynamics and the internal state variable theory, damage-thermoplasticity and -thermoviscoplasticity models incorporating nonlinear isotropic and nonlinear kinematic hardening are presented. Care is taken that the evolution equations governing the hardening response satisfy the second law of thermodynamics in the form of the Clausius-Duhem inequality for every admissible process.

For three elastoplastic damage models, a possibility to generalize the constitutive equations from small to finite deformations is shown. A damage evolution equation for ductile damage is formulated taking into account the nucleation and growth of voids. The generalization of the constitutive equations to finite deformations is based on the concept of so-called dual variables. The characteristic features of the theoretical framework adopted, are the choice of the strain and stress tensors and suitable associated time derivatives as well as the modeling of the kinematic hardening.

In view of an efficient numerical integration procedure, small elastic strains and a simplified kinematic hardening rule is assumed. For this simplified version of the constitutive models some restrictions must be fulfilled in order to satisfy the Clausius-Duhem inequality in a sufficient way.

For a simplified version of a damage-thermoviscoplasticity model an efficient, implicit time integration algorithm making use of the operator splitting methodology is presented. The special structure of the system of differential equations allows a reduction of the equations to be solved by means of Newton's method. The contributions to the consistent tangent modulus are calculated analytically.

The resulting integration algorithm has been implemented as a UMAT-subroutine into the ABAQUS finite element code. Some numerical examples for displacement and force controlled processes are discussed. Based on a coupled thermomechanical FE analysis, the necking of a axisymmetric tensile specimen and the deformation behavior of a thin cylinder under internal pressure and thermal loading is simulated.

Inhaltsverzeichnis

Notation und Operatoren	IV
1 Einleitung	1
2 Grundlagen der Kontinuums-Schädigungsmechanik	4
2.1 Definition der Schädigungsvariablen	4
2.2 Zerlegung der Deformation	5
2.3 Konzept der dualen Variablen	8
2.4 Bilanzgleichungen der Thermodynamik	11
2.4.1 Energieerhaltung – Erster Hauptsatz der Thermodynamik	12
2.4.2 Entropiebilanz – Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	12
3 Plastizitätsmodelle mit Schädigung	14
3.1 Thermodynamische Betrachtungen bei kleinen Deformationen	15
3.1.1 Modell von Lemaitre	16
3.1.2 Modell von Benallal et al.	21
3.1.3 Modell B	22
3.1.4 Modellierung der Schädigungsentwicklung	24
3.1.5 Zusammenfassende Darstellung und Diskussion	27
3.2 Thermodynamische Betrachtungen bei großen Deformationen	32
3.2.1 Verallgemeinerung des Modells von Lemaitre	35
3.2.2 Verallgemeinerung des Modells von Benallal et al.	37
3.2.3 Verallgemeinerung des Modells B	38
3.2.4 Zusammenfassende Darstellung und Diskussion	40
3.3 Vereinfachte konstitutive Beziehungen	43

3.3.1	Vereinfachte kinematische Verfestigung	43
3.3.2	Kleine elastische Verzerrungen	44
3.3.3	Zusammenfassende Darstellung und Diskussion	45
4	Erweiterung auf Thermo(visko)plastizität mit Schädigung	48
4.1	Thermodynamische Betrachtungen bei großen Deformationen	48
4.2	Wärmeleitungsgleichung	54
4.3	Vereinfachte konstitutive Beziehungen	56
4.3.1	Vereinfachte kinematische Verfestigung	56
4.3.2	Kleine thermoelastische Verzerrungen	56
4.4	Zusammenfassende Darstellung	60
5	Spannungsalgorithmus bei gekoppelten thermomechanischen Problemen	63
5.1	Finite Elemente Formulierung	63
5.1.1	Variationsprinzipien – schwache Form der Feldgleichungen	63
5.1.2	Allgemeine Problemstellung	66
5.1.3	Gleichgewichtsiteration	68
5.2	Integrationsalgorithmus	70
5.2.1	Integration des thermoelastischen Anteils	73
5.2.2	Integration des inelastischen Anteils	76
5.2.3	Integration der statischen Erholungsterme	79
5.2.4	Berechnung thermomechanischer Größen	81
5.2.5	Zusammenfassende Darstellung	83
5.2.6	Beiträge zur Tangentensteifigkeit	85
6	Numerische Beispiele	88
6.1	Einachsige zyklische Belastung mit Haltezeiten	88
6.2	Energetische Betrachtungen	91
6.3	Einschnürung eines axialsymmetrischen Stabes	93
6.4	Einachsige homogene Kriechbeanspruchung	100
6.5	Thermisch beanspruchter Behälter unter Innendruck	101
7	Zusammenfassung	107

Literaturverzeichnis	110
A Duale Variablen und Ableitungen	118
A.1 Familie 1: Zerlegung der Verzerrungstensoren	118
A.2 Familie 1: Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeiten	119
A.3 Familie 2: Zerlegung der Verzerrungstensoren	120
A.4 Familie 2: Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeiten	121
A.5 Familie 1: Spannungstensoren und Ableitungen	122
A.6 Familie 2: Spannungstensoren und Ableitungen	123
B Zur Berechnung der spezifischen Wärmekapazität	124
C Berechnung der Beiträge zur Tangentensteifigkeit	126
C.1 Beiträge aus Operator I	127
C.2 Beiträge aus Operator II	129
C.3 Beiträge aus Operator III	135
C.4 Beiträge der thermomechanischen Größen	138

Notation und Operatoren

Tensoren erster und zweiter Stufe werden in Fettdruck dargestellt, Tensoren vierter Stufe werden zusätzlich durch kalligrafische Buchstaben gekennzeichnet. Alle Komponentendarstellungen tensorieller Größen beziehen sich auf ein kartesisches Koordinatensystem mit den Basisvektoren \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) und unterliegen der Einsteinschen Summationskonvention. Die verwendeten Rechenregeln können, sofern sie hier nicht angegeben sind, den Lehrbüchern von DE BOER [26] und KLINGBEIL [49] entnommen werden.

Notation

Lateinische Buchstaben

A	Almansi'scher Verzerrungstensor
c_ε	spezifische Wärmekapazität bei konstanter Verzerrung
dX	materielles Linienelement in \mathbf{R}_R
d$\hat{\mathbf{x}}$	materielles Linienelement in $\hat{\mathbf{R}}_t$
dx	materielles Linienelement in \mathbf{R}_t
d	Schädigungsvariable
D	symmetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten (Verzerrungsgeschwindigkeitstensor)
e	spezifische innere Energie
\dot{e}_s	in Form von innerer Energie gespeicherte spezifische Leistung
\dot{e}_{sY}	gespeicherte spezifische Leistung, infolge der Änderung von Y
\dot{e}_{sr}	gespeicherte spezifische Leistung, infolge der Änderung von r
\dot{e}_{sd}	gespeicherte spezifische Leistung, infolge der Änderung von d
E	Euklidischer Punktraum
E	Green'scher Verzerrungstensor
$\tilde{\mathbf{E}}$	linearisierter Green'scher Verzerrungstensor
F	Fließfunktion
f	spezifische Volumenkraft
F	Deformationsgradient

$\Delta \mathbf{F}$	inkrementeller Deformationsgradient
\mathbf{g}	Temperaturgradient ($\mathbf{g} = \text{grad}\theta$)
\mathbf{k}	innere Variable vom Spannungstyp zur Beschreibung der isotropen Verfestigung
\mathbf{L}	räumlicher Geschwindigkeitsgradient
$\hat{\mathbf{P}}$	Mandel'scher Spannungstensor der Zwischenkonfiguration
\mathbf{N}	Normale an die Fließfläche
\mathbf{q}	Wärmeflußvektor
\mathbf{Q}	orthogonaler Rotationstensor
r	innere Variable vom Dehnungstyp
r_w	Wärmezufuhr pro Zeit- und Masseneinheit der Referenzkonfiguration
\mathbf{R}_i	Raubereich des materieller Körpers \mathcal{B} in E bzgl. der Ausgangskonfiguration
\mathbf{R}_R	Raubereich des materieller Körpers \mathcal{B} in E bzgl. der Referenzkonfiguration
$\hat{\mathbf{R}}_t$	Raubereich des materieller Körpers \mathcal{B} in E bzgl. der Zwischenkonfiguration
\mathbf{R}_t	Raubereich des materieller Körpers \mathcal{B} in E bzgl. der Konfiguration zum Zeitpunkt t
$\mathbf{R}_{t+\Delta t}$	Raubereich des materieller Körpers \mathcal{B} in E bzgl. der Konfiguration zum Zeitpunkt $t + \Delta t$
\mathbf{R}	orthogonaler Rotationstensor
s	plastische Bogenlänge
\mathbf{S}	gewichteter Cauchy'scher Spannungstensor
t	Zeitpunkt am Inkrementanfang
Δt	Zeitinkrement
\mathbf{t}_R	Spannungsvektor
\mathbf{T}	Cauchy'scher Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{T}}$	2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$\hat{\mathbf{T}}$	2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor der Zwischenkonfiguration
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor
$\Delta \mathbf{u}$	inkrementeller Verschiebungsvektor
\mathbf{U}	rechter Strecktensor
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor
\mathbf{V}	linker Strecktensor
\mathbf{W}	antisymmetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten (Wirbeltensor)
\mathbf{X}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in \mathbf{R}_R
\mathbf{x}	Ortsvektor eines materiellen Punktes in \mathbf{R}_t
\mathbf{Y}	innere Variable vom Dehnungstyp
\mathbf{Z}	innere Variable vom Spannungstyp zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung (bei finiten Deformationen)

Griechische Buchstaben

α	Wärmeausdehnungskoeffizient
$\boldsymbol{\alpha}$	Finger'scher Verzerrungstensor
γ_*	Entropieproduktion
$\hat{\boldsymbol{\gamma}}$	Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration (Familie 2)
$\hat{\mathbf{I}}$	Verzerrungstensor der Zwischenkonfiguration (Familie 1)
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Piola'scher Verzerrungstensor
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungsinkrement gemäß HUGHES-WINGET
η_*	spezifische Entropie
θ	absolute Temperatur
$\Delta\theta$	Temperaturinkrement
θ_r	Referenztemperatur von α und c_ε
$\Delta\theta_r$	Temperaturdifferenz $\theta - \theta_r$
κ	Kompressionsmodul ($\kappa = \lambda + 2/3 \mu$)
$\mathbf{\Lambda}$	Normale an materielle Fläche in \mathbf{R}_R
$\hat{\boldsymbol{\lambda}}$	Normale an materielle Fläche in $\hat{\mathbf{R}}_t$
$\boldsymbol{\lambda}$	Normale an materielle Fläche in \mathbf{R}_t
μ, λ	Lamé'sche Konstanten
ξ	plastischer Multiplikator
$\boldsymbol{\xi}$	innere Variable vom Spannungstyp zur Beschreibung der kinematischen Verfestigung (bei kleinen Deformationen)
$\hat{\boldsymbol{\xi}}$	Translationstensor der kinematischen Verfestigung in $\hat{\mathbf{R}}_t$
ρ_R	Massendichte bzgl. \mathbf{R}_R
ρ	Massendichte bzgl. \mathbf{R}_t
$\boldsymbol{\varsigma}$	Spannungstensor der Referenzkonfiguration (Familie 2)
$\hat{\boldsymbol{\tau}}$	Spannungstensor der Zwischenkonfiguration (Familie 2)
$\tilde{\boldsymbol{\tau}}$	Spannungstensor der Momentankonfiguration (Familie 2)
χ	skalarwertige Testfunktion
$\boldsymbol{\chi}$	vektorwertige Testfunktion
Ψ	spezifische freie Energie
w_{et}	thermoelastische Kopplung
w_p	spezifische plastische Spannungsleistung
w_g	spezifische Leistung $w_g = w_{et} + w_p - \dot{\varepsilon}_s$
Ω	innere Variable vom Spannungstyp
$-\Omega_e$	elastische Energiefreisetzungsrate

Kalligrafische Buchstaben

\mathcal{B}	materieller Körper
\mathcal{E}	Einheitstensor vierter Stufe ($\mathcal{E} = \delta_{ij} \delta_{mn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_n$)
\mathcal{C}	Elastizitätstensor vierter Stufe
\mathcal{M}	reziproker Elastizitätstensor vierter Stufe ($\mathcal{M}\mathcal{C} = \mathcal{E}$)
$\mathbf{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe ($\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$)

Indizes und Funktionssymbole

$(\cdot)_e$	elastischer Anteil von (\cdot)
$(\cdot)_t$	thermischer Anteil von (\cdot)
$(\cdot)_{et}$	thermoelastischer Anteil von (\cdot)
$(\cdot)_p$	inelastischer Anteil von (\cdot)
$(\cdot)_0$	numerisch bestimmte Näherung von (\cdot) zum Zeitpunkt t
$(\cdot)_{1/2}$	numerisch bestimmte Näherung von (\cdot) zum Zeitpunkt $t + 1/2 \Delta t$
$(\cdot)_1$	numerisch bestimmte Näherung von (\cdot) zum Zeitpunkt $t + \Delta t$
$^I(\cdot)$	Wert von (\cdot) in Operator I
$^{II}(\cdot)$	Wert von (\cdot) in Operator II
$^{III}(\cdot)$	Wert von (\cdot) in Operator III
$\bar{(\cdot)}$	bar Transformierte von (\cdot)
$(\cdot)'$	partielle Ableitung von (\cdot) nach der Temperatur
$\check{(\cdot)}$	Funktion der Größen $(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \theta, \mathbf{Q}_1)$
$\underset{\circ}{(\cdot)}$	Funktion der Größen $(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}, \Delta \theta, \mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, \mathbf{k}_1, \xi_1, \mathbf{d}_1)$

Es seien \mathbf{a}, \mathbf{b} Vektoren, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ Tensoren zweiter und \mathcal{D} ein Tensor vierter Stufe.

Operatoren

GRAD	Gradient bzgl. der Referenzkonfiguration
grad	Gradient bzgl. der Momentankonfiguration
div	Divergenz bzgl. der Momentankonfiguration
det \mathbf{A}	Determinante von \mathbf{A}
Sp \mathbf{A}	Spur von \mathbf{A}

\mathbf{A}^D	deviatorischer Anteil von \mathbf{A} ($\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - 1/3 (\text{Sp}\mathbf{A}) \mathbf{1}$)
$\ \mathbf{A}\ $	euklidische Norm von \mathbf{A} ($\ \mathbf{A}\ = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$)
$\ \mathbf{A}\ _D$	deviatorische Norm von \mathbf{A} ($\ \mathbf{A}\ _D = \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$)
$\langle \cdot \rangle$	Mc Auley Klammer
$(\cdot)^{-1}$	Inverse von (\cdot)
$(\cdot)^T$	Transponierte von (\cdot)
$(\cdot)^{\cdot}$	materielle Zeitableitung von (\cdot)
$\overset{\circ}{\mathbf{A}}$	Jaumann-Ableitung von \mathbf{A} ($\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W} \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{W}$)
$\overset{\Delta}{\mathbf{A}}$	untere Oldroyd Ableitung von \mathbf{A} ($\overset{\Delta}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{L}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{L}$)
$\overset{\nabla}{\mathbf{A}}$	obere Oldroyd Ableitung von \mathbf{A} ($\overset{\nabla}{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{L} \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{L}^T$)
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	dyadisches Produkt von \mathbf{a} und \mathbf{b} ($\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$)
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	dyadisches Produkt von \mathbf{A} und \mathbf{B} ($\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = A_{ij} B_{mn} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n$)
$\mathbf{A} \mathbf{B}$	Tensorprodukt von \mathbf{A} und \mathbf{B} ($\mathbf{A} \mathbf{B} = A_{ij} B_{jm} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m$)
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	Skalarprodukt von \mathbf{A} und \mathbf{B} ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{Sp}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T)$)
$\mathcal{D}[\mathbf{A}]$	Anwendung von \mathcal{D} auf \mathbf{A} ($\mathcal{D}[\mathbf{A}] = D_{ijkl} A_{kl} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$)

Rechenregeln

$$\text{Sp}(\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{C}) = \text{Sp}(\mathbf{C} \mathbf{A} \mathbf{B}) = \text{Sp}(\mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{A})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})[\mathbf{C}] = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A}$$

$$\mathcal{D}^T = D_{mnij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathcal{D}[\mathbf{B}] = \mathcal{D}^T[\mathbf{A}] \cdot \mathbf{B}$$

$$\frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial \mathbf{C}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T [\mathbf{B}] + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{C}} \right)^T [\mathbf{A}]$$

1 Einleitung

Das Konzept der Kontinuums-Schädigungsmechanik ermöglicht, das lokale Versagen von Bauteilen unter mechanischer und thermischer Belastung vorherzusagen. Das Konzept basiert auf der physikalischen Vorstellung, daß Oberflächenunstetigkeiten in Form von Mikrorissen oder Volumenunstetigkeiten in Form von Poren zu einer Schwächung des Werkstoffs führen und die Tragfähigkeit eines Bauteils herabsetzen. Die Schädigungsmechanik beschreibt den Bereich vom ungeschädigten Zustand eines Werkstoffs bis zum Einsetzen der Makrorißbildung.

Die Entwicklung der Schädigungsmechanik begann Ende der fünfziger Jahre mit der Arbeit von KACHANOV [47], der erstmals eine skalarwertige Schädigungsvariable einführte und eine entsprechende Evolutionsgleichung für diese Größe formulierte. Das KACHANOV Modell basiert auf der Theorie kleiner Deformationen und wurde entwickelt, um das Kriechversagen von Metallen unter einachsiger Belastung wiederzugeben. Abgesehen von einem Beitrag von RABOTNOV [78] aus dem Jahre 1968, der das *Konzept der effektiven Spannung* einführte, wurde diese rein phänomenologische Vorgehensweise erst im Laufe der siebziger Jahre wieder aufgegriffen. In der Literatur existieren, insbesondere für die Theorie kleiner Deformationen, eine Vielzahl von Möglichkeiten isotrope Schädigung in den konstitutiven Gleichungen zu berücksichtigen. Neben *Kriechschädigung* ([22], [23], [39], [51], [54], [94]) wurden vor allem *duktile Schädigung* ([57], [64], [81], [82], [83], [93]), *Ermüdungsschädigung* ([18], [31]) und die Wechselwirkung zwischen *Kriech- und Ermüdungsschädigung* ([1], [9], [66]) untersucht. Die Konzepte wurden auf mehrachsige Belastungen verallgemeinert und in einen thermodynamischen Rahmen eingebettet. Zusätzlich wurde dem anisotropen Charakter der Schädigung in einer Vielzahl von Veröffentlichungen ([8], [10], [16], [68], [69], [74], [75], [100]) Rechnung getragen. Neuere Untersuchungen auf dem Gebiet der Schädigungsmechanik befassen sich verstärkt mit der numerischen Umsetzung der Materialmodelle in Finite Elemente Programme ([5], [7], [21], [25], [32], [33], [46], [85], [86], [89], [90], [91]). Neben der Entwicklung effektiver Integrationsalgorithmen¹ wird eine Formulierung der Modelle angestrebt, die eine eindeutige experimentelle Identifikation der Materialparameter ermöglicht. Auf die Bestimmung von Materialparametern wird im Rahmen dieser Arbeit allerdings nicht eingegangen, vielmehr sei in diesem Zusammenhang auf [2] verwiesen.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird eine Möglichkeit aufgezeigt, wie Materialmodelle mit isotroper Schädigung in thermodynamisch konsistenter Weise von kleinen auf große Deformationen verallgemeinert werden können.

¹Repäsentative Arbeiten ohne Schädigung siehe z.B. [17], [35], [36], [42], [43], [45].

Nach einer kurzen Einführung in die Grundlagen der Kontinuumsmechanik in Kapitel 2 werden im dritten Kapitel zunächst drei für kleine Deformationen formulierte Plastizitätsmodelle mit nichtlinearer isotroper und kinematischer Verfestigung vorgestellt, die in thermodynamisch konsistenter Weise mit Schädigung gekoppelt sind. Es handelt sich hierbei um ein Modell von LEMAITRE [61, S.50 ff], ein Modell von BENALLAL ET AL. [4] sowie ein neuentwickeltes Modell, das die Bezeichnung Modell B trägt. Die Verallgemeinerung dieser drei Materialmodelle auf große Deformationen basiert auf dem von HAUPT & TSAKMAKIS entwickelten *Konzept der dualen Variablen* [38], das Spannungs- und Verzerrungstensoren in natürlicher Weise einander zuordnet und die entsprechenden objektiven Zeitableitungen bereitstellt. Die konstitutiven Gleichungen sind in einen speziellen thermodynamischen Rahmen eingebettet, der in dieser Form erstmals von TSAKMAKIS [97] vorgestellt wurde. Die so gewonnene „exakte thermodynamische Formulierung“ wird im Hinblick auf eine effiziente numerische Umsetzung gewissen Vereinfachungen unterworfen. Es werden kleine elastische Verzerrungen und eine vereinfachte konstitutive Beziehung für die kinematische Verfestigung angenommen. Allerdings müssen für diesen Sonderfall gewisse Restriktionen erfüllt sein, damit die thermodynamische Konsistenz der Materialgleichungen gewährleistet bleibt.

Im vierten Kapitel wird die „exakte thermodynamische Formulierung“ von Modell B auf Thermoviskoplastizität erweitert. Um das Materialverhalten insbesondere bei hohen Temperaturen besser beschreiben zu können, werden in den Evolutionsgleichungen für die isotrope und die kinematische sogenannte *statische Erholungsterme* eingeführt. Abschließend erfolgt der Übergang zu kleinen thermoelastischen Verzerrungen und einer vereinfachten kinematischen Verfestigungsregel.

Das fünfte Kapitel befaßt sich mit der numerischen Umsetzung des in Kapitel 4 erläuterten Materialmodells in das Finite Elemente Programm ABAQUS [41]. Der Ausgangspunkt der Methode der finiten Elemente bei gekoppelten thermomechanischen Problemen ist die schwache Form der Impulsbilanz und der Wärmeleitungsgleichung. Für eine gegebene Belastung gilt es den entsprechenden Zustand eines Körpers, d.h. die unbekanntenen Zustandsgrößen Verschiebung und Temperatur zu ermitteln, so daß die schwache Form der Feldgleichungen erfüllt ist. Dies erfordert in der Regel eine inkrementelle Vorgehensweise und eine Integration der konstitutiven Gleichungen im Rahmen einer Materialroutine.

Der hier vorgestellte Integrationsalgorithmus basiert auf dem HUGHES-WINGET-Verfahren [44], das einen schwachen Grad an inkrementeller Objektivität gewährleistet. Das System der konstitutiven Gleichungen wird, wie in der Literatur üblich (z.B. [46], [85], [89], [90]) mit einem *Operator-Split-Verfahren* integriert. In Anlehnung an die Arbeit von JANSOHN [45] wird ein dreifacher Operator-Split eingeführt. Die Aufteilung erfolgt in einen thermoelastischen Anteil (Operator I), einen inelastischen Anteil (Operator II) und einen Anteil, der die statischen Erholungsterme beinhaltet (Operator III). Der thermoelastische Anteil wird mit der Mittelpunktsregel integriert, die beiden anderen Anteile mit einem impliziten Euler-Verfahren. Die speziellen Struktur des Materialmodells ermöglicht eine erhebliche Reduktion der zu lösenden

Gleichungen in den Operatoren II und III. Somit behält der in [45] vorgestellte Integrationsalgorithmus auch bei Berücksichtigung von Schädigung seine Effizienz bei. Im Anschluß an die Berechnung der Zustandsvariablen müssen die konstitutiven Beiträge zur Tangentensteifigkeitsmatrix für die globale Gleichgewichtsiteration bereitgestellt werden. Im Hinblick auf eine optimale Konvergenzgeschwindigkeit werden die Beiträge zur Tangentensteifigkeit analytisch bestimmt (siehe hierzu auch [17], [45], [90]).

Abschließend werden in Kapitel 6 einige Anwendungsbeispiele für verschiebungs- und kraftgesteuerte Prozesse vorgestellt. Im Rahmen einer gekoppelten thermomechanischen FE-Analyse wird der Einschnürvorgang einer axialsymmetrischen Zugprobe simuliert sowie das Verformungsverhalten eines mit Innendruck und Temperatur beaufschlagten, dünnwandigen Zylinders untersucht.

2 Grundlagen der Kontinuums-Schädigungsmechanik

2.1 Definition der Schädigungsvariablen

Zur phänomenologischen Beschreibung der Schädigung werden innere Zustandsvariablen eingeführt, deren zeitliche Änderungen durch *Evolutionsgleichungen* gegeben sind. In der Literatur findet man verschiedene Schädigungsvariablen, die unterschiedliche physikalische Bedeutung besitzen. Beispielsweise beschreiben NEEDLEMAN & TVERGAARD [99, 77], ROUSSELIER [82], BENANNI ET. AL. [6] die Schädigung durch das relative Porenvolumen, wohingegen MUDRY [73] den Hohlraumradius als Maß für die Schädigung auffaßt.

Im Rahmen dieser Arbeit wird die Schädigung im Sinne von LEMAITRE & CHABOCHE [62, S.349f] als relative Oberflächendichte von Mikrodefekten verstanden. Hierzu wird an einem materiellen Punkt eines geschädigten Materials ein Flächenelement mit dem Betrag da und dem Normalenvektor \mathbf{n} betrachtet (siehe Abbildung 2.1). Derjenige Anteil der Fläche da , der von Mikrodefekten, d.h. Mikrorissen und Mikroporen eingenommen wird, sei da_d . Somit wird als Maß für die Schädigung in Richtung \mathbf{n} das Verhältnis

$$\mathbf{d}_{(\mathbf{n})} = \frac{da_d}{da} \tag{2.1}$$

definiert. Es ist ersichtlich, daß $\mathbf{d}_{(\mathbf{n})}$ die folgenden Grenzwerte besitzt:

- $\mathbf{d}_{(\mathbf{n})} = 0$ im ungeschädigten Zustand
- $\mathbf{d}_{(\mathbf{n})} = 1$ beim Bruch des dem betrachteten materiellen Punktes zugehörigen Volumenelements in zwei Teile.

Da Mikrorisse und Mikroporen in der Regel gewisse Vorzugsrichtungen aufweisen, ist die Schädigung grundsätzlich von anisotroper Natur. Der geschädigte Zustand wird durch eine tensorielle Größe beschrieben. Beispielsweise führen MURAKAMI & OHNO [75] einen symmetrischen Schädigungstensor zweiter Stufe, CHABOCHE [10] einen nichtsymmetrischen Tensor vierter Stufe ein. In der vorliegenden Arbeit blieb der anisotrope Charakter der Schädigung unberücksichtigt. Es wurde davon ausgegangen, daß die Mikrodefekte in allen Richtungen gleichverteilt sind und der geschädigte Zustand durch eine skalare Größe

$$\mathbf{d}_{(\mathbf{n})} \equiv d \tag{2.2}$$

erfaßt werden kann.

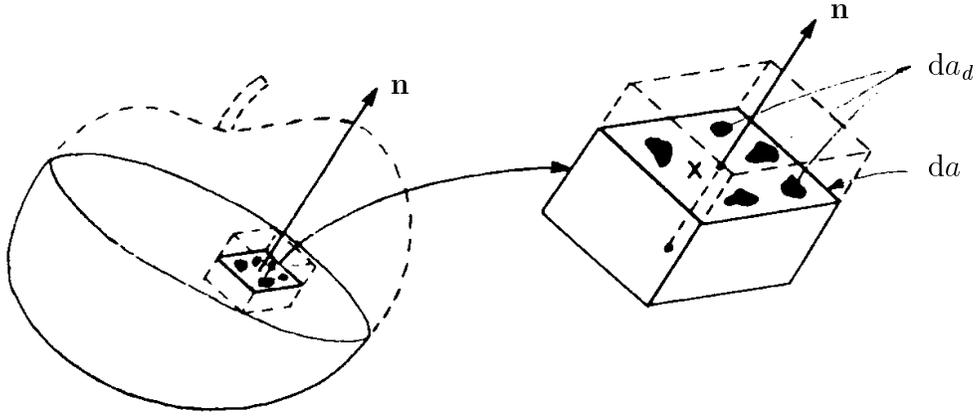


Abb. 2.1: Definition der Schädigung nach LEMAITRE [56].

2.2 Zerlegung der Deformation

Im folgenden wird ein materieller Körper \mathcal{B} im dreidimensionalen euklidischen Punktraum \mathbf{E} betrachtet, der bzgl. einer *Referenzkonfiguration* den Raumbereich \mathbf{R}_R einnimmt. Nach Wahl eines raumfesten Bezugspunktes \mathbf{O} in \mathbf{E} , läßt sich jedem materiellen Punkt X aus \mathbf{R}_R ein Ortsvektor \mathbf{X} zuordnen. Der Ort \mathbf{x} , den der materielle Punkt X zur Zeit t in der *Momentankonfiguration* einnimmt, wird durch die Bewegungsgleichung

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.3)$$

beschrieben, wobei für festgehaltenes t eine Inverse $\mathbf{X} = \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, t)$ existiert. Der dabei von \mathcal{B} beaufschlagte Raumbereich wird mit \mathbf{R}_t bezeichnet.

Für einen beliebigen, aber festen, Zeitpunkt t wird der *Deformationsgradient* \mathbf{F} wie folgt definiert:

$$\mathbf{F} := \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \mathbf{X}} = \text{GRAD } \bar{\mathbf{x}} \quad (2.4)$$

Der Deformationsgradient stellt somit eine Abbildungsvorschrift dar, die materielle Linienelemente der Referenzkonfiguration $d\mathbf{X}$ in materielle Linienelemente der Momentankonfiguration $d\mathbf{x}$ transformiert:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.5)$$

Dabei wird $\det \mathbf{F} > 0$ vorausgesetzt.

Anstelle materieller Linienelemente können auch Normalen an materiellen Flächen betrachtet werden. Es sei durch $\phi(\mathbf{X}) = C = \text{konst.}$ eine materielle Fläche bzgl. der Referenzkonfiguration definiert. In der Momentankonfiguration hat dieselbe materielle Fläche die zeitabhängige Form $\varphi(\mathbf{x}, t) = C$, wobei gilt $\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t), t) = \phi(\mathbf{X}) = C$ für $t = \text{konst.}$. Bildet man das totale Differential und setzt Beziehung (2.5) ein, so liefert dies

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}^{T-1} \boldsymbol{\Lambda} \quad , \quad (2.6)$$

wobei $\boldsymbol{\Lambda} = \text{GRAD } \phi(\mathbf{X})$ der Normalen an die materielle Fläche in der Ausgangskonfiguration und $\boldsymbol{\lambda} = \text{grad } \varphi(\mathbf{x}, t)$ der Normalen an dieselbe materielle Fläche in der Momentankonfiguration entspricht.

Wegen $\det \mathbf{F} > 0$ existiert eine eindeutige polare Zerlegung des Deformationsgradienten in einen eigentlich orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} und einen symmetrischen, positiv definiten Tensor \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad . \quad (2.7)$$

Die beiden Tensoren \mathbf{U} und \mathbf{V} werden als rechter bzw. linker Strecktensor bezeichnet. Bildet man die materielle Zeitableitung der Gl.(2.5) und ersetzt $d\mathbf{X}$ durch die inverse Beziehung der Gl.(2.5), so folgt

$$(\mathbf{dx})' = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad . \quad (2.8)$$

Die multiplikative Verknüpfung $\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ bildet den *räumlichen Geschwindigkeitsgradienten*

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \text{grad } \dot{\mathbf{x}} \quad . \quad (2.9)$$

Dieser kann additiv zerlegt werden in der Form

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad , \quad (2.10)$$

wobei

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (2.11)$$

den symmetrischen *Verzerrungsgeschwindigkeitstensor* und

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad . \quad (2.12)$$

den antisymmetrischen *Wirbeltensor* repräsentiert.

Die im Rahmen der irreversiblen Kontinuumsmechanik bei finiten Deformationen üblicherweise geltende *multiplikative Zerlegung* des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{et} \mathbf{F}_p \quad (2.13)$$

in einen *thermoelastischen Anteil* \mathbf{F}_{et} und einen *irreversiblen inelastischen Anteil* \mathbf{F}_p , wird auch im Zusammenhang mit Schädigung in der Regel beibehalten (siehe z.B. [90], [91])¹. Dies impliziert eine weitere Konfiguration, die sogenannte Zwischenkonfiguration $\hat{\mathbf{R}}_t$. Sie basiert auf dem Gedanken eines fiktiven lokalen Entlastungsvorgangs, ist infolgedessen spannungsfrei und im allgemeinen nicht kompatibel. Die beiden Tensorfelder \mathbf{F}_{et} und \mathbf{F}_p in der Zerlegung (2.13) sind durch das System der konstitutiven Gleichungen nur bis auf eine Starrkörperrotation eindeutig bestimmt, da sie durch einen beliebigen eigentlich orthogonalen Tensor \mathbf{Q} ergänzt werden können, d.h.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{et} \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{F}_p \quad (2.14)$$

In diesem Zusammenhang erscheint es naheliegend Invarianz der Materialgleichungen gegenüber beliebigen Drehungen der Zwischenkonfiguration zu fordern, wie dies GREEN & NAGHDI [34] getan haben.

Einsetzen der Beziehung (2.13) in Gleichung (2.5) bzw. (2.6) liefert die Abbildungsvorschriften

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}_{et} d\hat{\mathbf{x}} \quad , \quad d\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_p d\mathbf{X} \quad (2.15)$$

bzw.

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}_{et}^{T-1} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{F}_p^{T-1} \boldsymbol{\Lambda} \quad (2.16)$$

wobei $d\hat{\mathbf{x}}$ bzw. $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ Vektorfelder in der Zwischenkonfiguration darstellen. Entsprechend den kinematischen Zusammenhängen (2.9),(2.11) werden bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_t$ die folgenden Beziehungen eingeführt:

$$\hat{\mathbf{L}}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \quad , \quad (2.17)$$

$$\hat{\mathbf{D}}_p = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{L}}_p + \hat{\mathbf{L}}_p^T) \quad (2.18)$$

¹Eine andere Auffassung vertritt GELIN [33], der eine multiplikative Zerlegung der Deformation in elastische, geschädigte und inelastische Anteile vorschlägt.

2.3 Konzept der dualen Variablen

Die Theorie finiter Deformationen bietet eine Vielzahl von Möglichkeiten, Spannungs- und Verzerrungstensoren zu definieren. Hierbei stellt sich die Frage, welcher Spannungstensor welchem Verzerrungstensor sinnvollerweise zuzuordnen ist und wie die entsprechenden Zeitableitungen gewählt werden sollten. Eine Antwort liefert das von HAUPT & TSAKMAKIS [38] entwickelte *Konzept der dualen Variablen* (s. auch TSAKMAKIS [95, 97]). Ausgehend von skalaren Größen, die als forminvariant bzgl. der gewählten Konfiguration definiert werden, erhält man zugeordnete Spannungs- und Verzerrungstensoren, sowie geeignete Zeitableitungen.

Die betrachteten skalarwertigen Größen sind die Differenzen

$$\Delta = \frac{1}{2} (\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} - \mathbf{dX} \cdot \mathbf{dX}) \quad , \quad \delta = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) \quad (2.19)$$

und die *Spannungsleistung pro Volumeneinheit der Referenzkonfiguration*

$$W = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \quad , \quad (2.20)$$

wobei $\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T}$ dem *gewichteten Cauchy'schen Spannungstensor* und \mathbf{T} dem *Cauchy'schen Spannungstensor* entspricht.

Die Forderung nach Forminvarianz der Größen Δ , δ und der materiellen Zeitableitungen $\dot{\Delta}$, $\dot{\delta}$, $\ddot{\Delta}$, $\ddot{\delta}$, ... führt zu unterschiedlichen Verzerrungstensoren und zugeordneten Zeitableitungen. In diesem Zusammenhang wird zwischen zwei Familien unterschieden. Die Menge aller Verzerrungstensoren basierend auf Δ wird *Familie 1* zugeordnet, die auf Basis von δ definierten Tensoren *Familie 2*. Die Gleichungen (2.15)₂ und (2.16)₂ legen zusätzlich eine additive Zerlegung der beiden Größen Δ, δ in einen thermoelastischen und einen inelastischen Anteil gemäß

$$\Delta = \Delta_{et} + \Delta_p \quad , \quad \Delta_{et} = \frac{1}{2} (\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx} - \mathbf{d\hat{x}} \cdot \mathbf{d\hat{x}}) \quad , \quad \Delta_p = \frac{1}{2} (\mathbf{d\hat{x}} \cdot \mathbf{d\hat{x}} - \mathbf{dX} \cdot \mathbf{dX}) \quad (2.21)$$

bzw.

$$\delta = \delta_{et} + \delta_p \quad , \quad \delta_{et} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\lambda} - \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}}) \quad , \quad \delta_p = \frac{1}{2} (\hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\boldsymbol{\lambda}} - \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\Lambda}) \quad (2.22)$$

nahe. Die Gewährleistung der Forminvarianz der Größen $\Delta_{et}, \Delta_p, \delta_{et}, \delta_p$ und derer materieller Zeitableitungen impliziert eine additive Aufspaltung der Verzerrungstensoren und der zugehörigen Geschwindigkeiten. Mit Hilfe der Spannungsleistung pro Volumeneinheit der Referenzkonfiguration W läßt sich jedem so definierten Verzerrungstensor ein sogenannter dualer Spannungstensor zuweisen. Setzt man ferner die Invarianz der skalaren Größen \dot{W} , \ddot{W} , ... voraus, so erhält man die zugeordneten Spannungsgeschwindigkeiten.

Für *Familie 1* ergeben sich somit die Beziehungen

$$\Delta = \mathbf{dX} \cdot \mathbf{E} \, \mathbf{dX} = \mathbf{d\hat{x}} \cdot \hat{\Gamma} \, \mathbf{d\hat{x}} = \mathbf{dx} \cdot \mathbf{A} \, \mathbf{dx} \quad , \quad (2.23)$$

$$\Delta_{et} = \mathbf{dX} \cdot \mathbf{E}_{et} \, \mathbf{dX} = \mathbf{d\hat{x}} \cdot \hat{\Gamma}_{et} \, \mathbf{d\hat{x}} = \mathbf{dx} \cdot \mathbf{A}_{et} \, \mathbf{dx} \quad , \quad (2.24)$$

$$\Delta_p = \mathbf{dX} \cdot \mathbf{E}_p \, \mathbf{dX} = \mathbf{d\hat{x}} \cdot \hat{\Gamma}_p \, \mathbf{d\hat{x}} = \mathbf{dx} \cdot \mathbf{A}_p \, \mathbf{dx} \quad , \quad (2.25)$$

mit

$$\mathbf{E}_{et} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p \right) \quad , \quad \mathbf{E}_p = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{1} \right) \quad , \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_{et} + \mathbf{E}_p \quad , \quad (2.26)$$

$$\hat{\Gamma}_{et} = \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{E}_{et} \mathbf{F}_p^{-1} \quad , \quad \hat{\Gamma}_p = \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{E}_p \mathbf{F}_p^{-1} \quad , \quad \hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}_{et} + \hat{\Gamma}_p \quad , \quad (2.27)$$

$$\mathbf{A}_{et} = \mathbf{F}_{et}^{T-1} \hat{\Gamma}_{et} \mathbf{F}_{et}^{-1} \quad , \quad \mathbf{A}_p = \mathbf{F}_{et}^{T-1} \hat{\Gamma}_p \mathbf{F}_{et}^{-1} \quad , \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_{et} + \mathbf{A}_p \quad , \quad (2.28)$$

wobei \mathbf{E} dem *Green'schen Verzerrungstensor* bzgl. \mathbf{R}_R , $\hat{\Gamma}$ einem Verzerrungstensor bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_t$ und \mathbf{A} dem *Almansi'schen Verzerrungstensor* bzgl. \mathbf{R}_t entspricht.

Weiterhin gilt

$$\dot{\Delta} = \mathbf{dX} \cdot \dot{\mathbf{E}} \, \mathbf{dX} = \mathbf{d\hat{x}} \cdot \hat{\Delta} \, \mathbf{d\hat{x}} = \mathbf{dx} \cdot \dot{\mathbf{A}} \, \mathbf{dx} \quad , \quad (2.29)$$

$$\dot{\Delta}_{et} = \mathbf{dX} \cdot \dot{\mathbf{E}}_{et} \, \mathbf{dX} = \mathbf{d\hat{x}} \cdot \hat{\Delta}_{et} \, \mathbf{d\hat{x}} = \mathbf{dx} \cdot \dot{\mathbf{A}}_{et} \, \mathbf{dx} \quad , \quad (2.30)$$

$$\dot{\Delta}_p = \mathbf{dX} \cdot \dot{\mathbf{E}}_p \, \mathbf{dX} = \mathbf{d\hat{x}} \cdot \hat{\Delta}_p \, \mathbf{d\hat{x}} = \mathbf{dx} \cdot \dot{\mathbf{A}}_p \, \mathbf{dx} \quad , \quad (2.31)$$

d.h. die zugeordneten Verzerrungsgeschwindigkeiten sind zum einen die materielle Zeitableitung bzgl. \mathbf{R}_R zum anderen die unteren Oldroyd Ableitungen

$$(\)^{\Delta} = (\) + \hat{\mathbf{L}}_p^T (\) + (\) \hat{\mathbf{L}}_p \quad : \quad \text{bzgl. } \hat{\mathbf{R}}_t \quad , \quad (2.32)$$

$$(\)^{\Delta} = (\) + \mathbf{L}^T (\) + (\) \mathbf{L} \quad : \quad \text{bzgl. } \mathbf{R}_t \quad . \quad (2.33)$$

Ferner kann gezeigt werden, daß die Beziehungen

$$\dot{\hat{\mathbf{A}}} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{L}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{L} = \mathbf{D} \quad (2.34)$$

bzw.

$$\dot{\hat{\Gamma}}_p = \dot{\hat{\Gamma}}_p + \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\Gamma}_p + \hat{\Gamma}_p \hat{\mathbf{L}}_p = \hat{\mathbf{D}}_p \quad (2.35)$$

gelten.

Die entsprechenden dualen Spannungstensoren sind bzgl. \mathbf{R}_t der *gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor* \mathbf{S} , bzgl. \mathbf{R}_R der *zweite Piola-Kirchhoff Spannungstensor* $\tilde{\mathbf{T}}$ mit

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{F}^{T-1} \quad (2.36)$$

und bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_t$ ein Spannungstensor $\hat{\mathbf{T}}$, der einem *zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor in der Zwischenkonfiguration*

$$\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{F}_{et}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{F}_{et}^{T-1} \quad (2.37)$$

entspricht. Insgesamt gilt somit

$$W = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} = \hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{T}}} = \tilde{\mathbf{T}} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{E}} \quad (2.38)$$

Aus der Forminvarianz der Größen \dot{W} , \ddot{W} , ... lassen sich als zugehörige Spannungsgeschwindigkeiten die materielle Zeitableitung bzgl. \mathbf{R}_R und die oberen Oldroyd Ableitungen

$$(\cdot)^\nabla = (\cdot)^\cdot - \hat{\mathbf{L}}_p (\cdot) - (\cdot) \hat{\mathbf{L}}_p^T \quad : \quad \text{bzgl. } \hat{\mathbf{R}}_t \quad , \quad (2.39)$$

$$(\cdot)^\nabla = (\cdot)^\cdot - \mathbf{L} (\cdot) - (\cdot) \mathbf{L}^T \quad : \quad \text{bzgl. } \mathbf{R}_t \quad (2.40)$$

ableiten.

Analoge Vorgehensweise liefert für *Familie 2*

$$\delta = \mathbf{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{\Lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}} \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (2.41)$$

$$\delta_{et} = \mathbf{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{et} \mathbf{\Lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{et} \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha}_{et} \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (2.42)$$

$$\delta_p = \mathbf{\Lambda} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_p \mathbf{\Lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\alpha}_p \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (2.43)$$

mit

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{et} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{T-1} - \mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_p^{T-1} \right) \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{1}{2} \left(\mathbf{F}_p^{-1} \mathbf{F}_p^{T-1} - \mathbf{1} \right) \quad , \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{et} + \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad , \quad (2.44)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{et} = \mathbf{F}_p \boldsymbol{\varepsilon}_{et} \mathbf{F}_p^T \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p = \mathbf{F}_p \boldsymbol{\varepsilon}_p \mathbf{F}_p^T \quad , \quad \hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{et} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p \quad , \quad (2.45)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{et} = \mathbf{F}_{et} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{et} \mathbf{F}_{et}^T \quad , \quad \boldsymbol{\alpha}_p = \mathbf{F}_{et} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p \mathbf{F}_{et}^T \quad , \quad \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{et} + \boldsymbol{\alpha}_p \quad . \quad (2.46)$$

Hier ist $\boldsymbol{\varepsilon}$ der *Piola'sche Verzerrungstensor* bzgl. \mathbf{R}_R , $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ ein Verzerrungstensor bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_t$ und $\boldsymbol{\alpha}$ der *Finger'sche Verzerrungstensor* bzgl. \mathbf{R}_t . Ausgehend von den Beziehungen (2.41) – (2.43) folgt

$$\dot{\delta} = \mathbf{\Lambda} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{\Lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\boldsymbol{\gamma}}} \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (2.47)$$

$$\dot{\delta}_{et} = \mathbf{\Lambda} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{et} \mathbf{\Lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}_{et} \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}}_{et} \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (2.48)$$

$$\dot{\delta}_p = \mathbf{\Lambda} \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p \mathbf{\Lambda} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}_p \hat{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \overset{\Delta}{\boldsymbol{\alpha}}_p \boldsymbol{\lambda} \quad , \quad (2.49)$$

wobei im Gegensatz zu Familie 1 die entsprechenden Verzerrungsgeschwindigkeiten bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_t$ und \mathbf{R}_t durch die oberen Oldroyd Ableitungen

$$(\cdot)^\nabla = (\cdot) - \hat{\mathbf{L}}_p (\cdot) - (\cdot) \hat{\mathbf{L}}_p^T \quad : \quad \text{bzgl. } \hat{\mathbf{R}}_t \quad , \quad (2.50)$$

$$(\cdot)^\nabla = (\cdot) - \mathbf{L} (\cdot) - (\cdot) \mathbf{L}^T \quad : \quad \text{bzgl. } \mathbf{R}_t \quad . \quad (2.51)$$

gegeben sind.

In Analogie zu (2.34) bzw. (2.35) lassen sich folgende Zusammenhänge ableiten:

$$\hat{\Delta} \boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{L} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{L}^T = -\mathbf{D} \quad , \quad (2.52)$$

$$\hat{\Delta} \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p = \dot{\hat{\boldsymbol{\gamma}}}_p - \hat{\mathbf{L}}_p \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p - \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p \hat{\mathbf{L}}_p^T = -\hat{\mathbf{D}}_p \quad . \quad (2.53)$$

Die den Verzerrungstensoren $\boldsymbol{\alpha}$, $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}$ über die Spannungsleistung zugeordneten dualen Spannungstensoren sind $\boldsymbol{\varsigma}$, $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ und $\tilde{\boldsymbol{\tau}}$, wobei

$$\boldsymbol{\varsigma} = -\mathbf{S} \quad , \quad (2.54)$$

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{F}_{et}^T \boldsymbol{\varsigma} \mathbf{F}_{et} \quad , \quad (2.55)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{F}^T \boldsymbol{\varsigma} \mathbf{F} \quad . \quad (2.56)$$

Als Spannungsgeschwindigkeiten ergeben sich die materielle Zeitableitung bzgl. \mathbf{R}_R sowie die unteren Oldroyd Ableitungen

$$(\cdot)^\Delta = (\cdot) + \hat{\mathbf{L}}_p^T (\cdot) + (\cdot) \hat{\mathbf{L}}_p \quad : \quad \text{bzgl. } \hat{\mathbf{R}}_t \quad , \quad (2.57)$$

$$(\cdot)^\Delta = (\cdot) + \mathbf{L}^T (\cdot) + (\cdot) \mathbf{L} \quad : \quad \text{bzgl. } \mathbf{R}_t \quad . \quad (2.58)$$

Die Tabellen (A.1) – (A.6) im Anhang fassen die wichtigsten Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Verzerrungs- bzw. Spannungstensoren und deren Geschwindigkeiten zusammen.

2.4 Bilanzgleichungen der Thermodynamik

Die Untersuchung gekoppelter thermomechanischer Probleme setzt eine Bilanzgleichung für die Energie und die Entropie voraus.

2.4.1 Energieerhaltung – Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Der *erste Hauptsatz der Thermodynamik* fordert, daß die zeitliche Änderung der Gesamtenergie eines materiellen Körpers, bestehend aus innerer Energie und kinetischer Energie, gleich der Leistung der äußeren Kräfte und der pro Zeiteinheit zugeführten Wärme ist. In lokaler Form lautet dieses Postulat

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho_R} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + r_w \quad , \quad (2.59)$$

wobei e der spezifischen inneren Energie, \mathbf{q} dem Wärmeflußvektor, r_w der Wärmezufuhr pro Zeit- und Masseneinheit der Referenzkonfiguration und ρ_R bzw. ρ der Massendichte in der Referenz- bzw. Momentankonfiguration entspricht².

2.4.2 Entropiebilanz – Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Die vorliegende Arbeit strebt eine thermodynamisch konsistente Formulierung der Materialgleichungen an, d.h. die Gleichungen müssen dem *zweiten Hauptsatz der Thermodynamik* stets genüge leisten. Anhand dieser Forderung lassen sich Restriktionen an die Materialmodelle ableiten. TSAKMAKIS [96] hat für einen speziellen Ansatz der kinematischen Verfestigung gezeigt, daß die thermodynamische Konsistenz der Materialgleichungen keineswegs eine Selbstverständlichkeit darstellt.

Ausgehend von der Entropiebilanz in lokaler Form

$$\dot{\eta}_* = \frac{r_w}{\theta} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \frac{\mathbf{q}}{\theta} + \gamma_* \quad , \quad (2.60)$$

worin η_* die spezifische Entropie und θ die absolute Temperatur darstellt, erhält man mit der Definition der spezifischen freien Energie Ψ

$$\Psi = e - \theta \eta_* \quad (2.61)$$

und dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (2.59) für die spezifische Rate γ_* der Entropieproduktion

$$\theta \gamma_* = -\dot{\Psi} - \dot{\theta} \eta_* + \frac{1}{\rho_R} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{\rho \theta} \cdot \mathbf{g} \quad (2.62)$$

mit $\mathbf{g} = \operatorname{grad} \theta$. Das *Postulat der positiven Entropieproduktion* fordert nun, daß jeder zulässige thermomechanische Prozeß die Ungleichung

$$\gamma_* \geq 0 \quad (2.63)$$

²Zur Herleitung von (2.59) siehe z.B. HAUPT [37].

zu jedem Zeitpunkt t und an jedem materiellen Punkt \mathbf{X} erfüllt. Somit lautet der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der *Clausius-Duhem-Ungleichung*³

$$-\dot{\Psi} - \dot{\theta} \eta_* + \frac{1}{\rho_R} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{\rho \theta} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad . \quad (2.64)$$

Im Falle *kleiner Verzerrungen* geht die Clausius-Duhem-Ungleichung über in

$$-\dot{\Psi} - \dot{\theta} \eta_* + \frac{1}{\rho} \mathbf{T} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}} - \frac{\mathbf{q}}{\rho \theta} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad , \quad (2.65)$$

wobei $\tilde{\mathbf{E}}$ dem *linearisierten Green'schen Verzerrungstensor* entspricht.

³Eine ausführliche und verständliche Darstellung findet man beispielsweise in den Arbeiten von COLEMAN & GURTIN [24], LEMAITRE & CHABOCHE ([62],S.55f), HAUPT [37] und KAMLAH [48].

3 Plastizitätsmodelle mit Schädigung

In diesem Kapitel werden drei thermodynamisch konsistente Plastizitätsmodelle mit isotroper Schädigung vorgestellt, die nichtlineare isotrope und nichtlineare kinematische Verfestigung aufweisen. Die zunächst rein mechanisch formulierten Materialmodelle sind als isotherme Sonderfälle von Materialgleichungen der Thermoplastizität aufzufassen¹. Die übliche Vorgehensweise im Rahmen der Kontinuums-Schädigungsmechanik basiert auf der irreversiblen Thermodynamik mit inneren Zustandsvariablen, d.h. die konstitutiven Gleichungen werden so formuliert, daß der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung für alle zulässigen Prozesse stets erfüllt ist.

Insbesondere für die Theorie kleiner Deformationen findet man in der Literatur eine Vielzahl von Vorschlägen, wie isotrope Schädigung in den konstitutiven Gleichungen berücksichtigt werden sollte (siehe hierzu beispielsweise LEMAITRE [56], [57], [58], [63], CHABOCHE [11], [12], [13], MARQUIS [70], BENALLAL [5]). Stellvertretend hierfür werden ein Modell von LEMAITRE [61, S.50 ff] sowie ein Modell von BENALLAL ET AL. [4] vorgestellt und mit einem neuen Schädigungsmodell, dem sogenannten Modell B, verglichen.

Bekannterweise ist die Verallgemeinerung der konstitutiven Gleichungen von kleinen auf große Deformationen nicht eindeutig, sondern hängt entscheidend von der Wahl der Verzerrungs- und Spannungstensoren sowie den zugehörigen Zeitableitungen ab. Die vorliegende Arbeit orientiert sich deshalb am *Konzept der dualen Variablen und Ableitungen* [38, 95]. Die konstitutiven Gleichungen sind in einen speziellen thermodynamischen Rahmen eingebettet, der erstmals von TSAKMAKIS in [97] vorgeschlagen wurde. Im Hinblick auf einen effektiven Integrationsalgorithmus werden abschließend gewisse Vereinfachungen der konstitutiven Beziehungen eingeführt und deren Verträglichkeit mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik untersucht.

¹Es gelten in diesem Zusammenhang die in Kapitel 2 angeführten Beziehungen, allerdings unter der Voraussetzung $\mathbf{F}_{et} = \mathbf{F}_e$.

3.1 Thermodynamische Betrachtungen bei kleinen Deformationen

Unter der Annahme, daß der *linearisierte Green'sche Verzerrungstensor* $\tilde{\mathbf{E}}$ additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil

$$\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_e + \tilde{\mathbf{E}}_p \quad (3.1)$$

zerlegt werden kann, läßt sich die *spezifische freie Energie* Ψ als Funktion

$$\Psi(t) = \bar{\Psi}(\tilde{\mathbf{E}}_e, \mathbf{Y}, r, \mathbf{d}) \quad (3.2)$$

darstellen. Die tensorielle Größe \mathbf{Y} und die skalarwertigen Größen r und \mathbf{d} entsprechen inneren Variablen vom Dehnungstyp, wobei \mathbf{d} die in Kapitel 2.1 definierte Schädigungsvariable ist.

Einsetzen der materiellen Zeitableitung der spezifischen freien Energiefunktion in die Clausius-Duhem-Ungleichung (2.65) liefert unter Berücksichtigung der Zerlegung der Deformation für isotherme Prozesse mit homogener Temperaturverteilung

$$\left(\mathbf{T} - \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} \right) \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_e + \mathbf{T} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{Y}} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \dot{r} - \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{d}} \dot{\mathbf{d}} \geq 0 \quad (3.3)$$

Ferner wird angenommen, daß die Spannung lediglich von den Zustandsvariablen, nicht aber von deren Geschwindigkeiten abhängt. Damit Ungleichung (3.3) für alle zulässigen thermomechanischen Prozesse stets erfüllt ist, insbesondere auch für rein elastische Zustandsänderungen mit $\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{0}$, $\dot{r} = \dot{\mathbf{d}} = 0$, muß für die Spannung die Potentialbeziehung

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} \quad (3.4)$$

gelten. Diese Schlußfolgerung ist im Falle der Viskoplastizität mit Sicherheit richtig (siehe hierzu COLEMAN & GURTIN [24]), da dort die rechte Seite der Evolutionsgleichungen nur von momentanen Werten, nicht aber von Geschwindigkeiten abhängt. Bei Plastizität ist dies nicht der Fall, da die Evolutionsgleichungen homogen vom Grade 1 in der Zeit sind. Dies hat zur Folge, daß die Potentialeigenschaft (3.4) nicht notwendigerweise aus der Clausius-Duhem-Ungleichung gefolgert werden kann². Dennoch geht man in der Regel davon aus, daß die Beziehung (3.4) auch bei Plastizität gelten möge.

²siehe z.B. KAMLAH [48, S.91 f].

Definiert man in Analogie zu (3.4) die Potentialbeziehungen

$$\boldsymbol{\xi} := \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{Y}} \quad , \quad (3.5)$$

$$k := \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \quad , \quad (3.6)$$

$$\Omega := \rho \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial d} \quad , \quad (3.7)$$

so bleibt von der Clausius-Duhem-Ungleichung nur die sogenannte *Dissipationsungleichung*

$$\mathbf{T} \cdot \dot{\bar{\mathbf{E}}}_p - k \dot{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - \Omega \dot{d} \geq 0 \quad (3.8)$$

als Restriktion an die konstitutiven Gleichungen übrig. Die Größen $\boldsymbol{\xi}$, k und Ω sind die zu \mathbf{Y} , r und d thermodynamisch konjugierten Variablen vom Spannungstyp, wobei $\boldsymbol{\xi}$ die kinematische Verfestigung und k die isotrope Verfestigung beschreibt. Division der Ungleichung (3.8) durch der Faktor $(1-d)$ liefert

$$\frac{\mathbf{T}}{1-d} \cdot \dot{\bar{\mathbf{E}}}_p - \frac{k}{1-d} \dot{r} - \frac{\boldsymbol{\xi}}{1-d} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - \frac{\Omega}{1-d} \dot{d} \geq 0 \quad . \quad (3.9)$$

Wie in der Literatur allgemein üblich (siehe z.B. [65]), wird die spezifische freie Energiefunktion additiv in einen elastischen und einen plastischen Anteil zerlegt

$$\Psi(t) = \Psi_e(t) + \Psi_p(t) \quad . \quad (3.10)$$

Der plastische Anteil wiederum kann als Summe zweier Terme

$$\Psi_p(t) = \Psi_p^{iso}(t) + \Psi_p^{kin}(t) \quad (3.11)$$

dargestellt werden, die die Beiträge der isotropen und der kinematischen Verfestigung kennzeichnen. Somit können beide Verfestigungsansätze unabhängig voneinander mit der Dissipationsungleichung in Einklang gebracht werden.

3.1.1 Modell von Lemaitre

Entsprechend den Ausführungen in [61, S.50 ff] wird eine *v.Mises Fließfunktion* der Form

$$F = \bar{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, k, d) = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{T}}{1-d} - \boldsymbol{\xi} \right)^D \cdot \left(\frac{\mathbf{T}}{1-d} - \boldsymbol{\xi} \right)^D} - k \quad (3.12)$$

zugrunde gelegt. Als Evolutionsgleichung für $\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p$ (*Fließregel*) wird eine assoziierte Normalenregel

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \Lambda \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{T}} \quad (3.13)$$

angenommen. Diese Gleichung kann auch als Folgerung aus dem *Prinzip der maximalen Dissipationsleistung* erhalten werden³. Eine weitere Folgerung aus diesem Prinzip ist die Konvexität der Fließfläche. Im Falle der Fließfunktion (3.12) stellt $\mathbf{F}=0$ eine *v.Mises Fließfläche* mit kinematischer und isotroper Verfestigung dar, die zusätzlich Schädigungseinflüsse berücksichtigt. Für festgehaltene $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{k}$ und \mathbf{d} beschreibt $\mathbf{F}=0$ eine konvexe Fläche im Raum der Spannungen \mathbf{T} . Für den Proportionalitätsfaktor Λ gilt

$$\Lambda \begin{cases} > 0 & \text{für Belastung} \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases} , \quad (3.14)$$

wobei plastische Belastung im Falle $\mathbf{F}=0$ & $\dot{\mathbf{F}}|_{\tilde{\mathbf{E}}_p=\text{konst.}} \geq 0$ vorliegt.

Bildet man die Normale an die Fließfläche und setzt diese in (3.13) ein, so erhält man

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Lambda}{1-d} \mathbf{N} \quad , \quad \mathbf{N} = \frac{\left(\frac{\mathbf{T}}{1-d} - \boldsymbol{\xi} \right)^D}{\left\| \left(\frac{\mathbf{T}}{1-d} - \boldsymbol{\xi} \right)^D \right\|} . \quad (3.15)$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung gilt für die Rate der plastischen Bogenlänge

$$\dot{s} := \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p} = \frac{\Lambda}{1-d} . \quad (3.16)$$

Bei plastischer Beanspruchung wird Λ bzw. \dot{s} aus der sogenannten *Konsistenzbedingung* $\dot{\mathbf{F}}=0$ ermittelt.

Wie bereits erwähnt, lassen sich die Evolutionsgleichungen für \mathbf{k} und $\boldsymbol{\xi}$ bei entsprechender Wahl des plastischen Anteils der spezifischen freien Energiefunktion als hinreichende Bedingungen zur Erfüllung der Dissipationsungleichung (3.9) herleiten. Hierzu wird diese wie folgt erweitert:

$$\underbrace{\left(\frac{\mathbf{T}}{1-d} - \boldsymbol{\xi} \right) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \frac{\mathbf{k}}{1-d} \dot{r}}_{(A)} + \underbrace{\boldsymbol{\xi} \cdot \left(\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \frac{\dot{\mathbf{Y}}}{1-d} \right)}_{(B)} - \underbrace{\frac{\Omega}{1-d} \dot{\mathbf{d}}}_{(C)} \geq 0 . \quad (3.17)$$

Diese Ungleichung ist in hinreichender Weise befriedigt, wenn jeder der drei Terme für sich betrachtet größer oder gleich Null ist.

³Für Stoffgesetze ohne Schädigung siehe TSAKMAKIS [96] und die darin zitierte Literatur.

(A) Isotrope Verfestigung

Für den Anteil Ψ_p^{iso} der spezifischen freien Energiefunktion wird der Ansatz

$$\Psi_p^{iso}(t) = \bar{\Psi}_p^{iso}(r) = \frac{1}{2\rho} \gamma r^2 + \frac{1}{\rho} h r \quad (3.18)$$

gewählt, wobei γ, h nichtnegative Materialkonstanten mit $h \leq \mathbf{k}^{(0)} := \mathbf{k}|_{s=0}$ sind. Im Gegensatz zu CHABOCHE [14] beinhaltet Ψ_p^{iso} zusätzlich einen linearen Term. Ein solcher Ansatz soll bewirken, daß die im Material gespeicherte Energie besser beschrieben werden kann⁴.

Mit Hilfe der Potentialbeziehung (3.6) findet man somit für die isotrope Verfestigung

$$\mathbf{k} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{iso}}{\partial r} = \gamma r + h \quad (3.19)$$

Einsetzen der Beziehungen (3.15) und (3.16) in Ungleichung (A) liefert unter Berücksichtigung von (3.12) sowie der Fließbedingung $F=0$

$$\dot{s} - \frac{\dot{r}}{1-d} \geq 0 \quad (3.20)$$

Wählt man in Anlehnung an CHABOCHE [14]

$$\dot{r} = (1-d) \phi \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{k} - h) \right) \dot{s} \quad (3.21)$$

mit $\beta \geq 0, 0 \leq \phi \leq 1$, so ergibt sich aus (3.20)

$$(1-\phi) + \phi \frac{\beta}{\gamma} (\mathbf{k} - h) \geq 0 \quad (3.22)$$

Es ist sofort ersichtlich, daß diese Ungleichung mit den oben gemachten Einschränkungen an die Materialparameter ϕ, β, γ und h stets erfüllt ist. Bildet man die Zeitableitung der Gleichung (3.19) und setzt (3.21) ein, so erhält man schließlich als Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung

$$\dot{\mathbf{k}} = (1-d) \phi (\gamma - \beta (\mathbf{k} - h)) \dot{s} \quad (3.23)$$

⁴siehe hierzu auch die Ausführungen in [15]. Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß die exakte Form von Ψ_p^{iso} Gegenstand laufender Untersuchungen ist, so daß die Ausführungen hier rein exemplarischen Charakter besitzen.

(B) Kinematische Verfestigung

Für den Anteil Ψ_p^{kin} der spezifischen freien Energiefunktion wird üblicherweise eine quadratische Form

$$\Psi_p^{kin}(t) = \bar{\Psi}_p^{kin}(\mathbf{Y}) = \frac{c}{2\rho} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} \quad (3.24)$$

mit $c > 0$ gewählt. Somit ergibt sich aus der Potentialbeziehung (3.5) folgender linearer Zusammenhang zwischen den beiden thermodynamisch konjugierten Variablen \mathbf{Y} und $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{\xi} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{kin}}{\partial \mathbf{Y}} = c \mathbf{Y} \quad (3.25)$$

Einsetzen der Zeitableitung von (3.25) in (3.17) liefert für Ungleichung (B)

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \left(\dot{\mathbf{E}}_p - \frac{1}{c(1-d)} \dot{\boldsymbol{\xi}} \right) \geq 0 \quad (3.26)$$

Eine hinreichende Bedingung zur Erfüllung dieser Ungleichung ist, daß der Ausdruck in der Klammer nichtnegativ proportional zu $\boldsymbol{\xi}$ vorgegeben wird:

$$\dot{\mathbf{E}}_p - \frac{1}{c(1-d)} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \kappa_p \boldsymbol{\xi} \quad (3.27)$$

Dies macht deutlich, daß allein durch die Wahl des Proportionalitätsfaktors κ_p eine Vielzahl von Möglichkeiten existiert, thermodynamisch konsistente Evolutionsgleichungen für die kinematische Verfestigungsvariable $\boldsymbol{\xi}$ zu formulieren. Wählt man speziell

$$\kappa_p = \frac{b}{c} \dot{s} \quad (3.28)$$

mit $b \geq 0$, so ist die kinematische Verfestigung durch eine Evolutionsgleichung vom *Armstrong-Frederick-Typ*

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (1-d) \left(c \dot{\mathbf{E}}_p - b \dot{s} \boldsymbol{\xi} \right) \quad (3.29)$$

gegeben.

(C) Schädigung

Im folgenden wird das *Konzept der effektiven Spannung* zusammen mit dem *Prinzip der Dehnungsäquivalenz* vorausgesetzt. Dies besagt, daß in den Materialgleichungen die Spannung \mathbf{T} durch eine sogenannte effektive Spannung $\mathbf{T}/(1-d)$ ersetzt wird (siehe hierzu [61, S.12 f]). Infolgedessen wird der elastische Anteil der spezifischen freien Energiefunktion durch

$$\Psi_e(t) = \bar{\Psi}_e(\tilde{\mathbf{E}}_e, d) = \frac{1}{2\rho} (1-d) \mathbf{C} [\tilde{\mathbf{E}}_e] \cdot \tilde{\mathbf{E}}_e \quad (3.30)$$

vorgegeben, wobei \mathbf{C} dem Elastizitätstensor vierter Stufe

$$\mathbf{C} = 2\mu \mathbf{E} + \lambda (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \mathbf{C}^T \quad (3.31)$$

mit den Lamé'schen Konstanten μ und λ entspricht. Aus den Potentialeigenschaften (3.4) und (3.7) folgen die Beziehungen

$$\mathbf{T} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_e}{\partial \tilde{\mathbf{E}}_e} = (1-d) \mathbf{C} [\tilde{\mathbf{E}}_e] \quad , \quad (3.32)$$

$$\Omega = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_e}{\partial d} = -\frac{1}{2} \mathbf{C} [\tilde{\mathbf{E}}_e] \cdot \tilde{\mathbf{E}}_e =: \Omega_e \quad . \quad (3.33)$$

Einsetzen der Elastizitätsbeziehung (3.32) in (3.33) und Aufspalten in deviatorischen und kugelsymmetrischen Anteil liefert

$$\Omega_e = -\frac{1}{2(1-d)} \left(\mathbf{T}^D \cdot \tilde{\mathbf{E}}_e^D + \frac{1}{3} (\text{Sp } \mathbf{T})(\text{Sp } \tilde{\mathbf{E}}_e) \right) \quad . \quad (3.34)$$

Ersetzt man anschließend den Deviator bzw. die Spur von $\tilde{\mathbf{E}}_e$ mit Hilfe der Spannungsbeziehung (3.32), so kann Ω_e auch in der Form

$$\Omega_e = -\frac{1}{(1-d)^2} \left\{ \frac{1}{4\mu} \mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D + \frac{1}{6(2\mu+3\lambda)} (\text{Sp } \mathbf{T})^2 \right\} \quad (3.35)$$

dargestellt werden⁵. Aus dieser Darstellung geht hervor, daß die zur Schädigungsvariable d thermodynamisch konjugierte Größe Ω stets kleiner oder gleich Null ist. Dies wiederum hat zur Folge, daß der dritte Term in der Dissipationsungleichung (3.17) unter der Voraussetzung $\dot{d} \geq 0$ niemals negativ werden kann.

⁵Die Größe $-\Omega_e$ wird in der Literatur häufig auch als *elastische Energiefreisetzungsrates* bezeichnet (siehe hierzu [62, S.381 f]).

3.1.2 Modell von Benallal et al.

Das von BENALLAL ET AL. in [4] vorgestellte Modell unterscheidet sich vom LEMAITRE-Modell in der Definition der Fließfunktion und der Evolutionsgleichung für die kinematische Verfestigung. Ausgehend von einer Fließfunktion der Form

$$F = \bar{F}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, k, d) = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}}{1-d} \right)^D \cdot \left(\frac{\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}}{1-d} \right)^D} - k \quad , \quad (3.36)$$

erhält man analog zu (3.13) als Evolutionsgleichung für $\tilde{\mathbf{E}}_p$

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Lambda}{1-d} \mathbf{N} \quad , \quad \mathbf{N} = \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\|(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D\|} \quad . \quad (3.37)$$

Die Dissipationsungleichung (3.9) wird hier wie folgt ergänzt:

$$\underbrace{\left(\frac{\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}}{1-d} \right) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - \frac{k}{1-d} \dot{r}}_{(A)} + \underbrace{\boldsymbol{\xi} \cdot \left(\frac{\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p}{1-d} - \frac{\dot{\mathbf{Y}}}{1-d} \right)}_{(B)} - \underbrace{\frac{\Omega}{1-d} \dot{d}}_{(C)} \geq 0 \quad . \quad (3.38)$$

Analog zu Kapitel 3.1.1 kann gezeigt werden, daß unter Annahme der Beziehung (3.21) Term (A) stets größer oder gleich Null ist. Ist Ψ_p^{iso} durch (3.18) gegeben, so behält die Evolutionsgleichung für k die Struktur (3.23) bei. Gelten zudem die Beziehungen (3.30) und somit (3.32) bzw. (3.33), so ist unter der Voraussetzung $\dot{d} \geq 0$ auch Term (C) stets größer oder gleich Null. Damit Ungleichung (3.38) in hinreichender Weise erfüllt ist, verbleibt zu zeigen, daß auch Term (B) nichtnegativ ist.

(B) Kinematische Verfestigung

Ausgehend von (3.24) und (3.25) erhält man für Term (B)

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \left(\frac{\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p}{1-d} - \frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}}{c(1-d)} \right) \geq 0 \quad . \quad (3.39)$$

Diese Ungleichung ist in hinreichender Weise erfüllt, wenn

$$\frac{\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p}{1-d} - \frac{\dot{\boldsymbol{\xi}}}{c(1-d)} = \kappa_p \boldsymbol{\xi} \quad (3.40)$$

gilt, wobei der nichtnegative Proportionalitätsfaktor κ_p wie in Kapitel 3.1.1 durch Gleichung (3.28) festgelegt ist. Infolgedessen nimmt der Verfestigungsansatz für $\boldsymbol{\xi}$ die Form

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = c \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p - (1-d) b \dot{s} \boldsymbol{\xi} \quad (3.41)$$

an.

3.1.3 Modell B

Dieses Modell zeichnet sich unter anderem dadurch aus, daß alle Spannungen durch effektive Spannungen ersetzt werden. Somit lautet die Fließfunktion:

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}(\mathbf{T}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{k}, \mathbf{d}) = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}}{1 - \mathbf{d}} \right)^D \cdot \left(\frac{\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}}{1 - \mathbf{d}} \right)^D} - \frac{\mathbf{k}}{1 - \mathbf{d}} . \quad (3.42)$$

Die Rate der plastischen Verzerrung $\dot{\mathbf{E}}_p$ ist durch eine Normalenregel (3.37) festgelegt, und die Dissipationsungleichung wird in der Form (3.38) dargestellt. Eine weitere charakteristische Eigenschaft dieses Modells ist, daß die gesamte freie Energiefunktion und nicht nur deren elastischer Anteil linear von $(1 - \mathbf{d})$ abhängt⁶. Für die Evolutionsgleichungen der isotropen und der kinematischen Verfestigung hat dies folgende Konsequenzen:

(A) Isotrope Verfestigung

Definiert man

$$\Psi_p^{iso}(t) = \bar{\Psi}_p^{iso}(r, \mathbf{d}) = (1 - \mathbf{d}) \left(\frac{1}{2\rho} \gamma r^2 + \frac{1}{\rho} h r \right) , \quad (3.43)$$

so führt die Potentialeigenschaft (3.6) zu der Beziehung

$$\mathbf{k} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{iso}}{\partial r} = (1 - \mathbf{d}) (\gamma r + h) . \quad (3.44)$$

Hierin sind γ, h nichtnegative Materialkonstanten mit $h \leq \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}|_{s=0}$. Wählt man speziell

$$\dot{r} = \phi \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\mathbf{k}}{1 - \mathbf{d}} - h \right) \right) \dot{s} \quad (3.45)$$

mit $\beta \geq 0$ und $0 \leq \phi \leq 1$, so kann man sich vergegenwärtigen, daß Term (A) in (3.38) stets größer oder gleich Null ist. Der Verfestigungsansatz

$$\left(\frac{\mathbf{k}}{1 - \mathbf{d}} \right) \dot{} = \phi \left(\gamma - \beta \left(\frac{\mathbf{k}}{1 - \mathbf{d}} - h \right) \right) \dot{s} \quad (3.46)$$

wird gewonnen, indem Beziehung (3.44) zeitlich differenziert und \dot{r} durch (3.45) ersetzt wird.

⁶Diese Auffassung vertritt auch JU [46]. Seiner Meinung nach ist eine freie Energiefunktion, so wie sie Lemaitre definiert physikalisch ungeeignet, da dort die Schädigung einzig und allein mit den elastischen Zustandsvariablen verknüpft wird.

(B) Kinematische Verfestigung

Ausgehend von der Darstellung

$$\Psi_p^{kin}(t) = \bar{\Psi}_p^{kin}(\mathbf{Y}, d) = (1-d) \frac{c}{2\rho} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} \quad (3.47)$$

folgt aus (3.5)

$$\boldsymbol{\xi} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{kin}}{\partial \mathbf{Y}} = (1-d) c \mathbf{Y} \quad , \quad (3.48)$$

wobei $c > 0$ gilt. Unter Berücksichtigung dieser Beziehung ergibt sich für Ungleichung (B)

$$\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1-d} \right) \cdot \left(\dot{\mathbf{E}}_p - \frac{1}{c} \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1-d} \right)' \right) \geq 0 \quad . \quad (3.49)$$

Setzt man

$$\dot{\mathbf{E}}_p - \frac{1}{c} \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1-d} \right)' = \kappa_p \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1-d} \right) \quad (3.50)$$

mit dem nichtnegativen Proportionalitätsfaktor κ_p (3.28), so ist (3.49) stets erfüllt und die Evolutionsgleichung für die kinematische Verfestigung ist durch

$$\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1-d} \right)' = c \dot{\mathbf{E}}_p - b \dot{s} \left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1-d} \right) \quad (3.51)$$

gegeben.

(C) Schädigung

Da der elastische Anteil der spezifischen freien Energiefunktion auch hier durch einen Ansatz der Form (3.30) beschrieben wird, bleibt die Elastizitätsbeziehung (3.32) unverändert. Aufgrund der Beziehungen (3.7), (3.30), (3.43) und (3.47) kann die zur Schädigungsvariable d thermodynamisch konjugierte Größe Ω als Summe dreier Terme

$$\Omega = \Omega_e + \Omega_p^{iso} + \Omega_p^{kin} \quad (3.52)$$

mit

$$\Omega_e = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_e}{\partial d} = -\frac{1}{2} \mathbf{C} [\tilde{\mathbf{E}}_e] \cdot \tilde{\mathbf{E}}_e \quad , \quad (3.53)$$

$$\Omega_p^{iso} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{iso}}{\partial d} = - \left(\frac{1}{2} \gamma r^2 + h r \right) \quad , \quad (3.54)$$

$$\Omega_p^{kin} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{kin}}{\partial d} = -\frac{c}{2} \mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y} \quad (3.55)$$

dargestellt werden. Es ist sofort ersichtlich, daß die Größe Ω stets kleiner oder gleich Null ist und somit Ungleichung (C) unter der Voraussetzung $\dot{d} \geq 0$ erfüllt ist.

3.1.4 Modellierung der Schädigungsentwicklung

Im Rahmen dieser Arbeit wird die zeitliche Entwicklung der Schädigung durch eine konstitutive Gleichung der Form

$$\dot{\mathbf{d}} = a_0 \dot{s} + (a_1 + a_2 \mathbf{d}) \frac{(-\Omega_e)^n}{(1-\mathbf{d})^q} \dot{s} \quad (3.56)$$

mit den nichtnegativen Materialkonstanten a_0, a_1, a_2, n, q beschrieben. Die Größe Ω_e ist durch Gleichung (3.35) bestimmt. Es handelt sich hierbei um eine verallgemeinerte Darstellung einer erstmals von DHAR ET AL. [28] formulierten Evolutionsgleichung zur Beschreibung duktiler Schädigung.

Aus metallographischen Untersuchungen ist bekannt, daß duktile Schädigung im wesentlichen das Ergebnis dreier aufeinanderfolgender Prozesse ist, nämlich Porenbildung, Porenwachstum und deren Zusammenlagerung. Die Zunahme der Schädigung infolge von *Porenbildung* wird durch den ersten Term in (3.56) zum Ausdruck gebracht⁷. Die beiden verbleibenden Terme, die von der elastischen Energiefreisetzungsrate $-\Omega_e$ abhängen, beschreiben die Entwicklung der Schädigung infolge von *Porenwachstum*⁸.

Obige Evolutionsgleichung für \mathbf{d} beinhaltet folgende Sonderfälle:

- $n=1, q=0$: DHAR ET AL.
- $n=1, q=0, a_0=0, a_1=0$: TAI & YANG
- $a_0=0, a_2=0$: LEMAITRE .

Es ist ersichtlich, daß die von LEMAITRE [59, 60] und TAI & YANG [92] vorgeschlagenen Entwicklungsgleichungen für die Schädigung lediglich Porenwachstum berücksichtigen. Die Schädigungsentwicklung in den Arbeiten [61] und [4] zeichnet sich durch eine besonders einfache Struktur aus. Hierin wird $a_0 = a_2 = q = 0$ bzw. in ([61], S.98) zusätzlich noch $n = 1$ gesetzt.

In Abbildung 3.1 wird der Einfluß der Materialkonstanten a_0, a_1, a_2, q, n auf das Verfestigungsverhalten und den Schädigungsverlauf am Beispiel eines einachsigen Zugversuchs anhand

⁷Diese Erkenntnis basiert auf experimentellen Befunden von LE ROY ET AL. [67]. Diese haben Keimbildung und Wachstum von Hohlräumen unter Zugbelastung an weichgeglühten Kohlenstoffstählen untersucht und festgestellt, daß die Anzahl an neugebildeten Poren zunächst nahezu linear mit der Verzerrung anwächst und erst ab einem kritischen Schwellwert rapide ansteigt.

⁸Bereits Ende der 60iger Jahre untersuchten MCCLINTOCK [71], RICE & TRACEY [79] einen zylindrischen bzw. kugelförmigen Hohlraum in einem starr plastischen Material und stellten einen exponentiellen Zusammenhang zwischen Porenwachstum und dem sogenannten *Triaxialitätsverhältnis*, dem Verhältnis von hydrostatischer Spannung zu v.Mises Vergleichsspannung, fest.

von Modell B demonstriert. Hierzu wurde das System der konstitutiven Gleichungen einachsig formuliert und mit einem expliziten Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung integriert. Gleichung (3.56) macht deutlich, daß mit zunehmendem a_0, a_1, a_2, q die Schädigung stärker anwächst. Dies führt zu einer Verschiebung des Schädigungsverlaufs hin zu kleineren Dehnungen und somit zu einer früheren Entfestigung (siehe Abb. 3.1 a – d). Insbesondere der neu eingeführte Materialparameter q ermöglicht einen Steilabfall im Spannungs-Dehnungs-Verhalten zu simulieren. Der Einfluß der Materialkonstante n auf den Schädigungsverlauf hängt von der elastischen Energiefreisetzungsrate ab. Da bei dem zugrunde gelegten Materialparametersatz $-\Omega_e < 1$ ist, wächst die Schädigung mit zunehmendem n weniger stark an (siehe Abb. 3.1 e). Bei anderer Wahl der Materialparameter wäre jedoch auch der umgekehrte Fall denkbar.

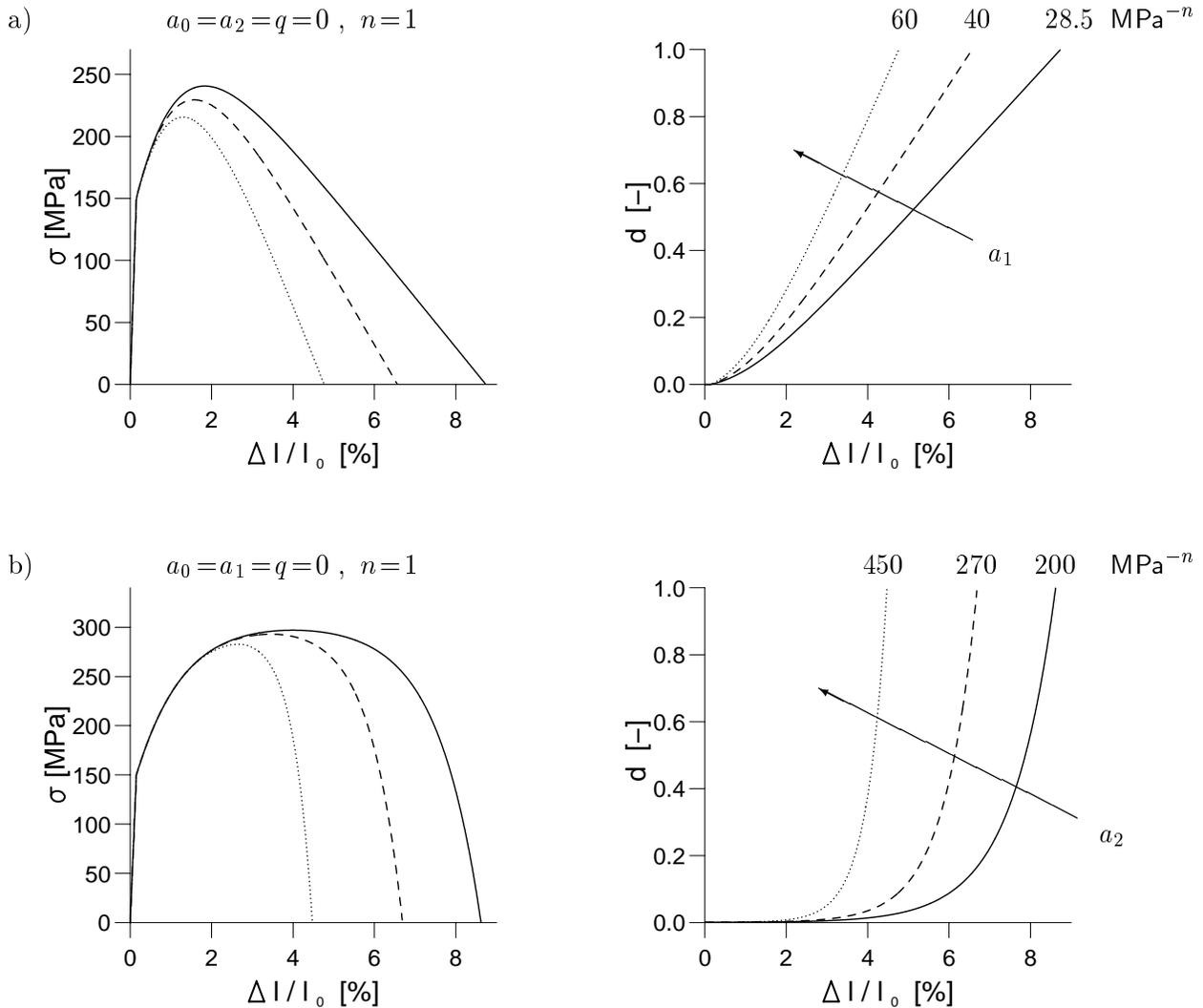


Abb. 3.1 Fortsetzung nächste Seite.

$$a_1 = 8.5 \text{ MPa}^{-n}, \quad a_2 = 55 \text{ MPa}^{-n} :$$

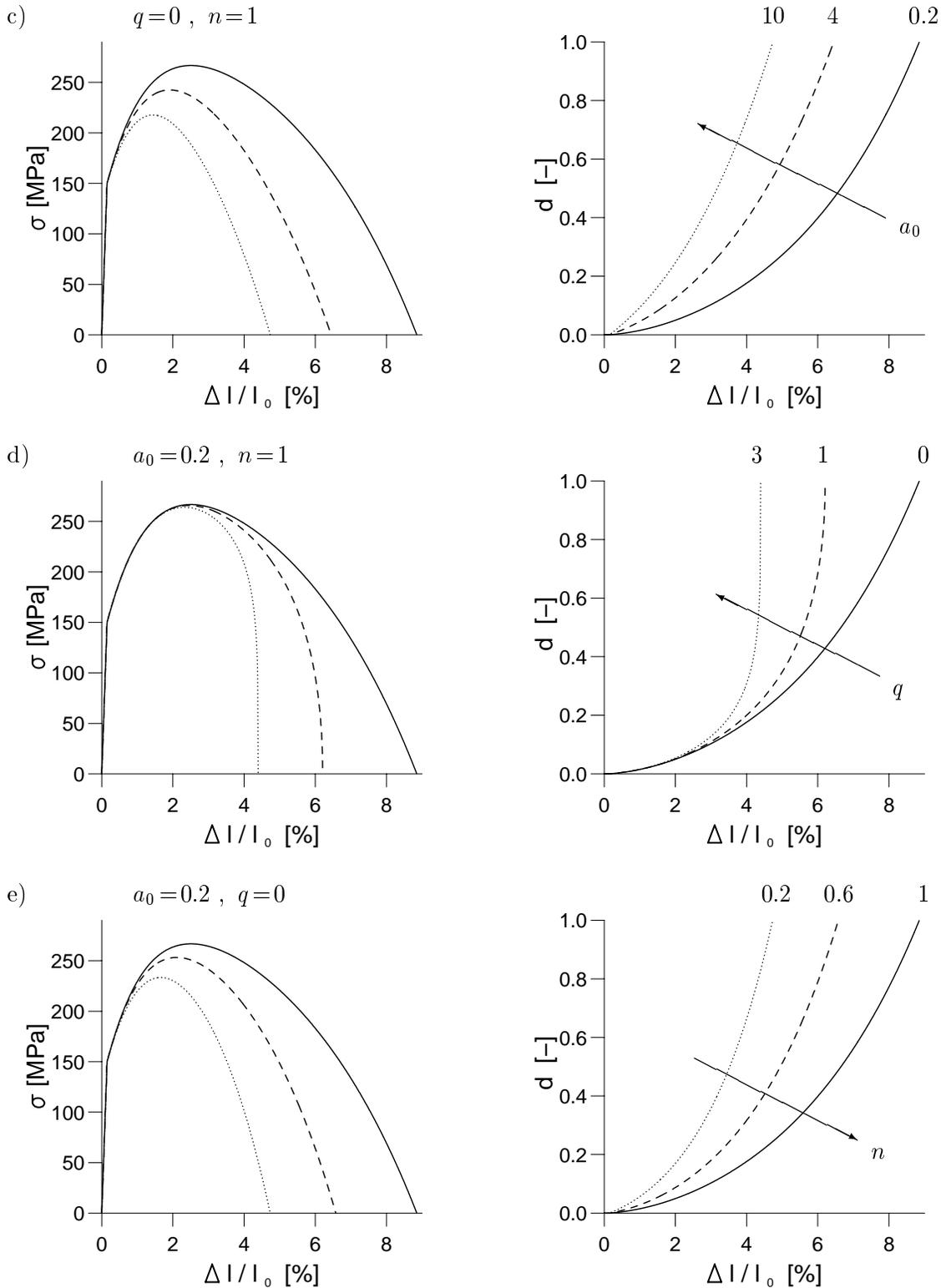


Abb. 3.1: Einfluß der Materialkonstanten a_1, a_2, a_0, q, n auf Spannungs- und Schädigungsverlauf bei einachsigen Zug (Modell B); $E = 100 \text{ GPa}$, $\Phi = 1$, $h = k_0 = 150 \text{ MPa}$, $\beta = 100$, $\gamma = 8000 \text{ MPa}$, $b = 100$, $c = 5000 \text{ MPa}$.

3.1.5 Zusammenfassende Darstellung und Diskussion

Die zuvor anhand thermodynamischer Betrachtungen gewonnenen konstitutiven Gleichungen sind zusammenfassend in Tabelle 3.1 dargestellt. Alle drei Modelle beruhen auf einer additiven Zerlegung des Verzerrungstensors in einen elastischen und einen plastischen Anteil sowie einem Elastizitätsgesetz der Form (3.32). Sie lassen sich auf eine v.Mises Fließfunktion mit kinematischer und isotroper Verfestigung sowie einem Ansatz der kinematischen Verfestigung vom Armstrong-Frederick-Typ zurückzuführen. Die Unterschiede zwischen den drei Modellen bestehen in der Definition der Fließfunktion, den Evolutionsgleichungen für \mathbf{k} und $\boldsymbol{\xi}$ sowie der Wahl der spezifischen freien Energiefunktion. Ohne Schädigung ergibt sich in allen drei Fällen ein und dasselbe Plastizitätsmodell, dessen Eigenschaften beispielsweise in [96, S.22 ff] beschrieben werden.

Die charakteristischen Unterschiede der drei Modelle werden, wie in Abbildung 3.2 dargestellt, am Beispiel eines einachsigen Zugversuchs diskutiert. Die Größe ξ_{11} entspricht der Axialkomponente des kinematischen Verfestigungstensors. Der Verlauf der Cauchy-Spannung σ macht deutlich, daß das Modell von BENALLAL ET AL. ein ungewöhnliches Spannungs-Dehnungsverhalten aufweist. Im Gegensatz zu den beiden anderen Modellen strebt die Spannung mit zunehmender Schädigung nicht gegen Null, sondern gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert. Somit ist bei diesem Modell der Zustand maximaler Schädigung ($d \rightarrow 1$) durch beliebig große elastische Dehnungen gekennzeichnet (siehe hierzu Gleichung (3.32)). Bei Modell B gehen mit zunehmender Schädigung neben der Cauchy-Spannung σ auch die plastischen inneren Variablen $\boldsymbol{\xi}$ und \mathbf{k} gegen Null. Dies ist bei den beiden anderen Modellen nicht der Fall. Diese charakteristische Eigenschaft ist darauf zurückzuführen, daß bei Modell B in den Evolutionsgleichungen alle Spannungen, insbesondere auch die plastischen inneren Variablen $\boldsymbol{\xi}$ und \mathbf{k} , durch effektive Spannungen ersetzt wurden. Für den in Abbildung 3.2 angegebenen Materialparametersatz zeigen sowohl das Modell von LEMAITRE als auch Modell B mit fortschreitender Dehnung eine nahezu lineare Entwicklung der Schädigung. Beim Modell von BENALLAL ET AL. hingegen strebt die Schädigung mit zunehmender Dehnung asymptotisch gegen eins.

Als weiteres Beispiel wurde ein gekerbter zylindrischer Stab unter monotoner Zugbelastung betrachtet. Die numerische Simulation erfolgte mit Hilfe der Methode der finiten Elemente. Hierzu wurden die in Tabelle 3.1 zusammengefaßten Materialmodelle in das Finite Elemente Programm ABAQUS implementiert⁹. Die Berechnungen wurden, wie in Abbildung 3.3 dargestellt, für einen zylindrischen Stab mit einem Kerbradius $R = 0.4$ mm und einem Schlankheitsgrad $l_0 / (2r_0) = 4$ durchgeführt. Bei der Modellierung der Probe wurde die Axialsymmetrie und die Symmetrie bzgl. der $(r, \varphi, 0)$ -Ebene ausgenutzt. Die Diskretisierung erfolgte mit 111 8-knotigen, axialsymmetrischen Elementen mit reduzierter Integrationsordnung (2x2

⁹Die numerische Umsetzung wird anhand von Modell B ausführlich in Kapitel 5 erläutert.

Integration). Das FE-Netz einschließlich Randbedingungen, die Lastgeschichte (Vorgabe der Verschiebung u an der Stirnfläche) sowie die zugrunde gelegten Materialparameter gehen ebenfalls aus Abbildung 3.3 hervor.

Abbildung 3.4 zeigt für unterschiedliche Totaldehnungen $e = 2u/l_0$ den Verlauf der Schädigung, der plastischen Bogenlänge und der elastischen Energiefreisetzungsrates im engsten Querschnitt. Die Ergebnisse sind jeweils an den Integrationspunkten dargestellt und über der undeformierten Struktur aufgetragen. Es ist ersichtlich, daß die maximale Schädigung und die maximale plastische Bogenlänge bei einer Dehnung von $e_0 = 0.2\%$ im Kerbgrund auftritt. Erst mit fortschreitender Totaldehnung kommt es zu einer Schädigungsumlagerung. Bei der Dehnung $e_1 = 0.46\%$ liegt die maximale Schädigung im Innern der Probe vor, die maximale plastische Bogenlänge hingegen verbleibt im Kerbgrund. Die elastische Energiefreisetzungsrates weist einen ähnlichen Verlauf auf wie die Schädigung¹⁰. Abbildung 3.4 macht ferner deutlich, daß alle drei Modelle für den in Abbildung 3.3 angeführten Materialparametersatz qualitativ dasselbe Verhalten zeigen. In allen drei Fällen geht die Makrorißbildung von der Probemitte aus, da dort die Schädigung ein Maximum besitzt. In Abbildung 3.5 ist der Verlauf der Schädigung und der v.Mises Norm des Spannungsdeviators

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D} \quad (3.57)$$

über der Totaldehnung am Integrationspunkt A (gekennzeichnet in Abbildung 3.3) dargestellt. Daraus geht hervor, daß bei allen drei Modellen die Schädigung exponentiell mit der Dehnung ansteigt. Zunehmende Schädigung bewirkt einen Verlust der Tragfähigkeit und somit eine Abnahme der Vergleichsspannung σ_v . Abschließend sei angemerkt, daß die hier präsentierten Ergebnisse im Einklang mit Berechnungen von BILLARDON & MORET-BAILEY [7] bzw. BENALLAL ET AL. [5] stehen¹¹.

¹⁰Beide Größen sind über Gleichung (3.56) miteinander verknüpft. Eine Zunahme der elastischen Energiefreisetzungsrates führt somit unmittelbar zu einer höheren Schädigungsrate.

¹¹Diese Arbeiten basieren allerdings auf einem Viskoplastizitätsmodell und berücksichtigen keine kinematische Verfestigung.

Tab. 3.1: Für kleine Deformationen formulierte Materialmodelle von LEMAITRE [61], BENALLAL ET AL. [4] sowie Modell B

$$\mathbf{T} = (1-d) \mathbf{C} [\tilde{\mathbf{E}} - \tilde{\mathbf{E}}_p]$$

LEMAITRE	BENALLAL ET AL.	MODELL B
$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\ \left(\frac{\mathbf{T}}{1-d} - \boldsymbol{\xi} \right)^D \right\ - k$	$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\ \left(\frac{\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}}{1-d} \right)^D \right\ - k$	$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\ \left(\frac{\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi}}{1-d} \right)^D \right\ - \frac{k}{1-d}$
$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \mathbf{N}$	$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \mathbf{N}$	$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \mathbf{N}$
$\mathbf{N} = \frac{\left(\frac{\mathbf{T}}{1-d} - \boldsymbol{\xi} \right)^D}{\left\ \left(\frac{\mathbf{T}}{1-d} - \boldsymbol{\xi} \right)^D \right\ }$	$\mathbf{N} = \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\left\ (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D \right\ }$	$\mathbf{N} = \frac{(\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D}{\left\ (\mathbf{T} - \boldsymbol{\xi})^D \right\ }$
$\dot{k} = (1-d) \phi(\gamma - \beta(k-h)) \dot{s}$	$\dot{k} = (1-d) \phi(\gamma - \beta(k-h)) \dot{s}$	$\left(\frac{k}{1-d} \right) \dot{} = \phi \left(\gamma - \beta \left(\frac{k}{1-d} - h \right) \right) \dot{s}$
$\dot{\boldsymbol{\xi}} = (1-d) \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c \mathbf{N} - b \boldsymbol{\xi} \right) \dot{s}$	$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c \mathbf{N} - (1-d) b \boldsymbol{\xi} \right) \dot{s}$	$\left(\frac{\boldsymbol{\xi}}{1-d} \right) \dot{\phantom{\boldsymbol{\xi}}} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c \mathbf{N} - b \frac{\boldsymbol{\xi}}{1-d} \right) \dot{s}$
$\dot{d} = \left(a_0 + (a_1 + a_2 d) \frac{(-\Omega_e)^n}{(1-d)^q} \right) \dot{s}$		
$\Omega_e = -\frac{1}{(1-d)^2} \left\{ \frac{1}{4\mu} \mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D + \frac{1}{6(2\mu+3\lambda)} (\text{Sp } \mathbf{T})^2 \right\}$		
$\dot{F} = 0 \Rightarrow \dot{s} \quad \text{für } F=0 \ \& \ \dot{F} \Big _{\tilde{\mathbf{E}}_p = \text{konst.}} \geq 0$		
$\dot{s} = 0 \quad \text{sonst}$		

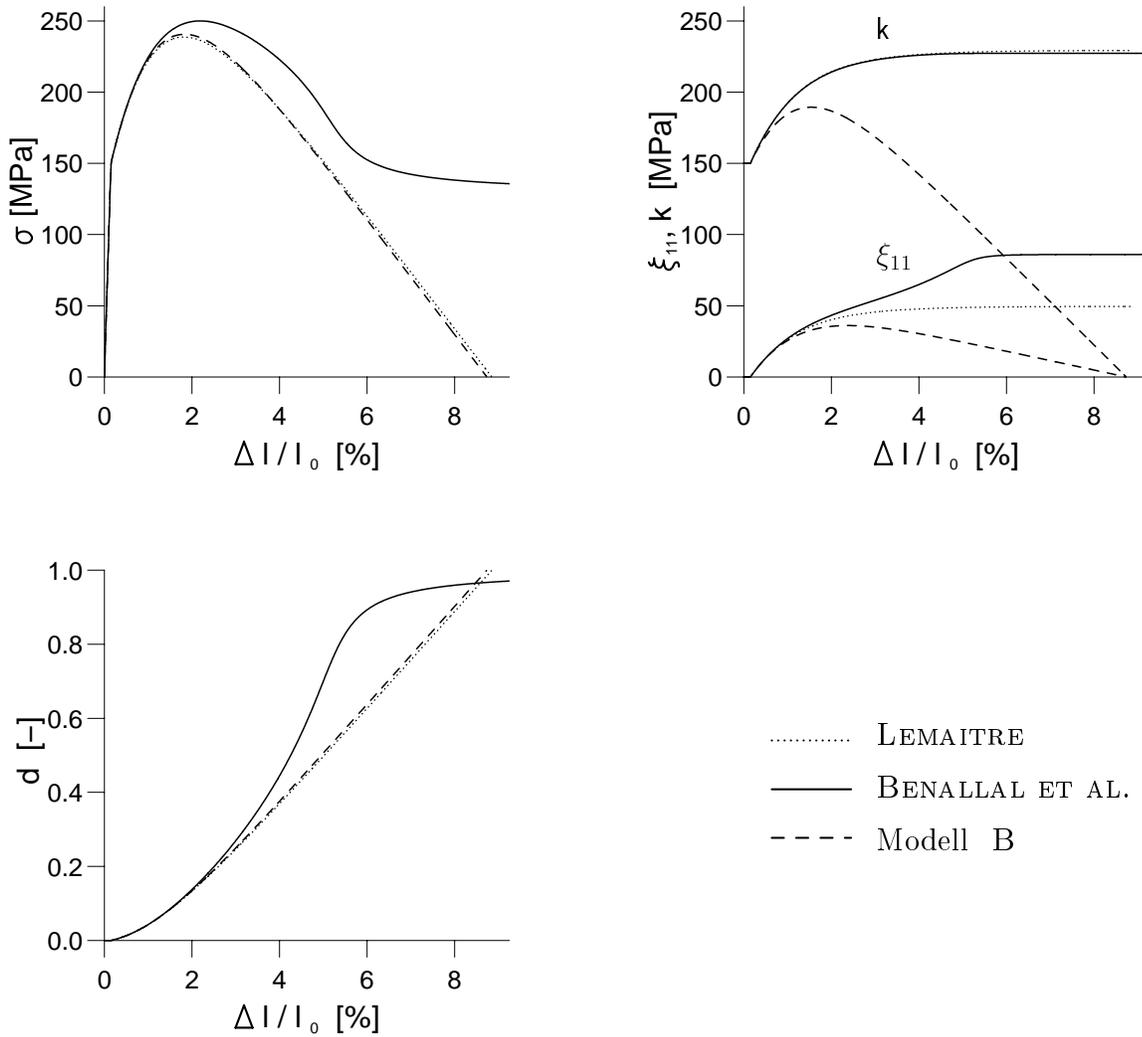


Abb. 3.2: Spannungsverläufe σ , ξ_{11} und k sowie Entwicklung der Schädigung bei einachsigem Zug für die drei für kleine Deformationen formulierten Materialmodelle; $E = 100\,000$ MPa, $h = k_0 = 150$ MPa, $\Phi = 1$, $\beta = 100$, $\gamma = 8000$ MPa, $b = 100$, $c = 5000$ MPa, $a_0 = 0$, $a_1 = 28.5$ MPa⁻¹, $a_2 = 0$ MPa⁻¹, $n = 1$, $q = 0$.

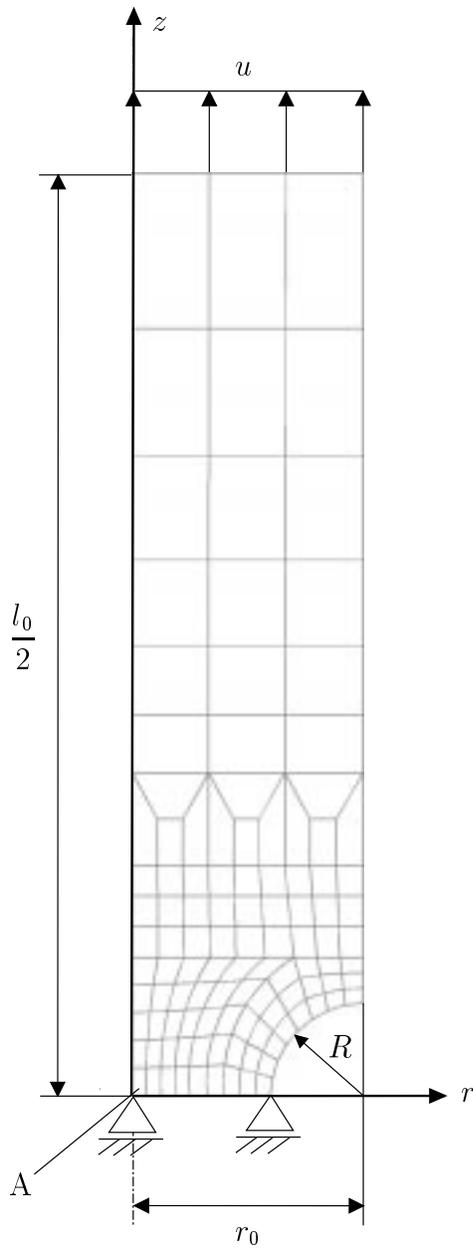


Abb. 3.3: Gekerbter Rundstab:

$l_0 = 8 \text{ mm}$, $r_0 = 1 \text{ mm}$, $R = 0.4 \text{ mm}$.

Materialparameter: $E = 200 \text{ GPa}$,
 $h = k_0 = 400 \text{ MPa}$, $\Phi = 1$, $\beta = 10$,
 $\gamma = 1500 \text{ MPa}$, $b = 10$, $c = 1500 \text{ MPa}$,
 $a_0 = 0$, $a_1 = 4.2 \text{ MPa}^{-1}$, $a_2 = 0 \text{ MPa}^{-1}$,
 $n = 1$, $q = 0$.

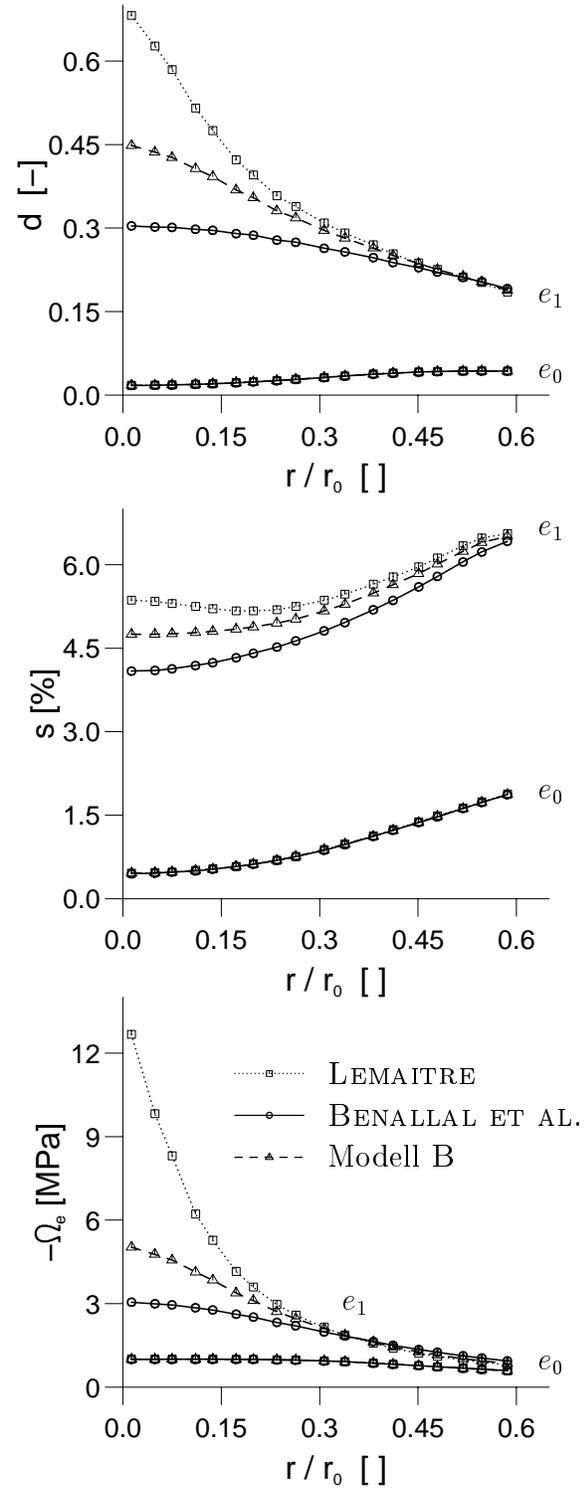


Abb. 3.4: Schädigung, plastische Bogenlänge sowie elastische Energiefreisetzungsrates im engsten Querschnitt bei $e_0 = 0.2\%$ und $e_1 = 0.46\%$.

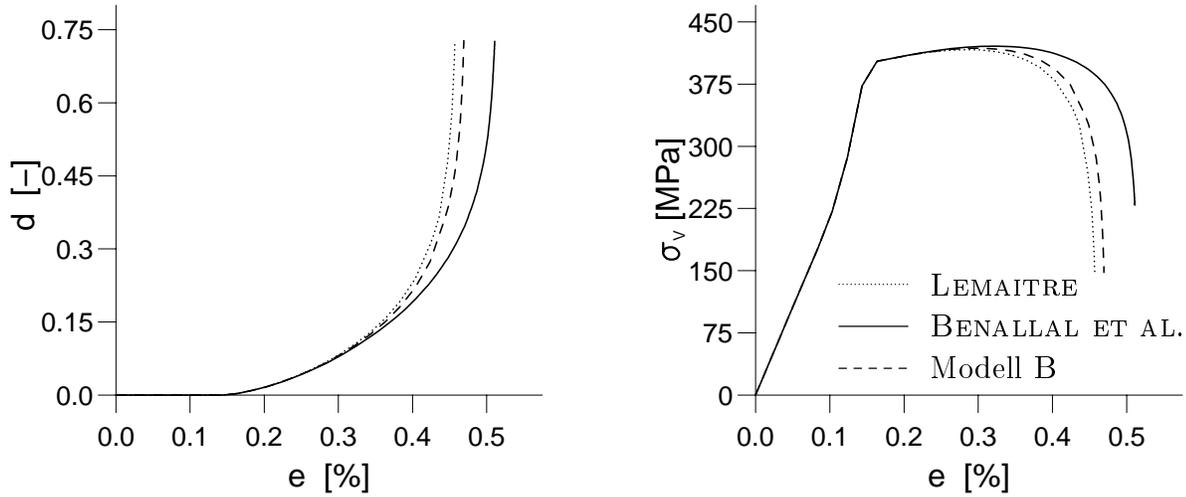


Abb. 3.5: Entwicklung der Schädigung und der v.Mises Norm des Spannungsdeviators am Integrationspunkt A.

3.2 Thermodynamische Betrachtungen bei großen Deformationen

Im Rahmen der Theorie großer Deformationen werden die konstitutiven Gleichungen zunächst bzgl. der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathbf{R}}_t$ formuliert. Die folgenden Ausführungen beschränken sich auf die in Kapitel 1 erwähnte Familie 1 (Familie 2 wird ausführlich in [29, 30] behandelt). In Analogie zu (3.2) wird eine spezifische freie Energiefunktion

$$\Psi(t) = \bar{\Psi}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_e, \hat{\mathbf{Y}}, r, d) \quad (3.58)$$

definiert, die von den Verzerrungen $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ und $\hat{\mathbf{\Gamma}}_p$ nur über die Differenz $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e = \hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{\Gamma}}_p$ abhängt. Die Größe $\hat{\mathbf{Y}}$ repräsentiert einen Verzerrungstensor, der dieselbe mathematische Struktur besitzt wie $\hat{\mathbf{\Gamma}}_e$ ¹². In Anbetracht isothermer Prozesse mit homogener Temperaturverteilung lautet die Clausius-Duhem-Ungleichung, ausgedrückt in Größen der Zwischenkonfiguration,

$$\hat{\mathbf{T}} \cdot \overset{\Delta}{\hat{\mathbf{\Gamma}}} - \rho_R \dot{\Psi} \geq 0 \quad (3.59)$$

Einsetzen der materiellen Zeitableitung der spezifischen freien Energiefunktion in (3.59) liefert unter Einbeziehung der additiven Zerlegung des Verzerrungstensors sowie der Definition der

¹²Die Bedeutung der übrigen Größen wurde bereits in Kapitel 2.2 erläutert. Das Symbol $\hat{}$ bringt zum Ausdruck, daß es sich hierbei um Größen der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathbf{R}}_t$ handelt.

unteren Oldroyd-Ableitung gemäß (2.32)

$$\left(\hat{\mathbf{T}} - \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\Gamma}_e} \right) \cdot \hat{\Gamma}_e + \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\Gamma}_p + \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\Gamma}_e} \cdot \left(\hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\Gamma}_e + \hat{\Gamma}_e \hat{\mathbf{L}}_p \right) - \rho_R \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{d}} \dot{\mathbf{d}} \right) \geq 0, \quad (3.60)$$

oder mit der Eigenschaft $\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\Gamma}_e} \hat{\Gamma}_e = \hat{\Gamma}_e \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\Gamma}_e}$, die unter der Voraussetzung elastischer Isotropie gilt, zusammen mit Beziehung (2.18) bzw. (2.35)

$$\left(\hat{\mathbf{T}} - \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\Gamma}_e} \right) \cdot \hat{\Gamma}_e + \left(\hat{\mathbf{T}} + 2 \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\Gamma}_e} \hat{\Gamma}_e \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \rho_R \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{d}} \dot{\mathbf{d}} \right) \geq 0. \quad (3.61)$$

Der Coleman-Gurtin'schen Vorgehensweise [24] folgend erhält man wie bei der geometrisch linearen Formulierung für die Spannung eine Potentialeigenschaft

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\Gamma}_e}. \quad (3.62)$$

Unter der Annahme, daß diese Potentialbeziehung auch bei elastisch-plastischer Belastung ihre Gültigkeit beibehält, folgt aus (3.61) unter Berücksichtigung der Definitionen

$$\hat{\mathbf{Z}} := \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}}, \quad (3.63)$$

$$\mathbf{k} := \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r}, \quad (3.64)$$

$$\Omega := \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{d}} \quad (3.65)$$

sowie der Definition des *Mandel'schen Spannungstensors*

$$\hat{\mathbf{P}} := (\mathbf{1} + 2 \hat{\Gamma}_e) \hat{\mathbf{T}} \quad (3.66)$$

die Restungleichung

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \mathbf{k} \dot{r} - \Omega \dot{\mathbf{d}} \geq 0. \quad (3.67)$$

Der Tensor $\hat{\mathbf{Z}}$ in (3.63) besitzt hierbei dieselbe mathematische Struktur wie der Spannungstensor $\hat{\mathbf{T}}$ (siehe Gleichung (2.37)). Division der Dissipationsungleichung (3.67) durch den Faktor $(1-\mathbf{d})$ führt zu der Darstellung

$$\frac{\hat{\mathbf{P}}}{1-\mathbf{d}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \frac{\mathbf{k}}{1-\mathbf{d}} \dot{r} - \frac{\Omega}{1-\mathbf{d}} \dot{\mathbf{d}} \geq 0, \quad (3.68)$$

auf die im folgenden zurückgegriffen wird.

Die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellte Möglichkeit, die in Tabelle 3.1 zusammengefaßten Materialmodelle auf finite Deformationen zu verallgemeinern, basiert auf dem in Kapitel 2.3 erläuterten *Konzept der dualen Variablen*. Dies hat unter anderem zur Folge, daß die materiellen Zeitableitungen durch objektive Zeitableitungen ersetzt werden müssen.

Ferner wird die konstitutive Theorie, wie bereits angedeutet, mit dem *Mandel'schen Spannungstensor* formuliert. In Analogie zum Mandel'schen Spannungstensor wird ein *Translationstensor der kinematischen Verfestigung*

$$\hat{\xi} := (\mathbf{1} + 2\hat{\Phi})\hat{Z} \quad (3.69)$$

eingeführt, der dieselbe mathematische Struktur besitzt wie der Mandel'schen Spannungstensor. Folglich hat $\hat{\Phi}$ die mathematische Struktur eines Green'schen Verzerrungstensors bzgl. der Zwischenkonfiguration, so daß gilt $\hat{\Phi}^T = \hat{\Phi}$.

Mit Hilfe dieses Translationstensors wird in Anlehnung an TSAKMAKIS [97] eine *v.Mises Fließfunktion* $F = \bar{F}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\xi}, \mathbf{k}, \mathbf{d})$ mit kinematischer und isotroper Verfestigung im Raum der Mandel'schen Spannungstensoren definiert, die zusätzlich noch Schädigungseffekte berücksichtigt.

Eine weitere charakteristische Eigenschaft dieser Theorie ist, daß die Evolutionsgleichung für die kinematische Verfestigung nicht mit dem Translationstensor $\hat{\xi}$ formuliert wird, sondern mit Hilfe der plastischen inneren Variablen \hat{Z} . Hierbei ist $\hat{\Phi}$ so zu wählen, daß bei den verallgemeinerten Modellen von LEMAITRE und BENALLAL ET AL. für \hat{Z} bzw. bei Modell B für $\hat{Z}/(1-\mathbf{d})$ eine Evolutionsgleichung vom *Armstrong-Frederick-Typ* resultiert.

Als Evolutionsgleichung für den plastischen Anteil des Verzerrungstensors (*Fließregel*) wird eine assoziierte Normalenregel relativ zur Zwischenkonfiguration

$$\hat{\mathbf{D}}_p = \hat{\Gamma}_p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \hat{\mathbf{P}}} \quad (3.70)$$

mit

$$\Lambda \begin{cases} > 0 & \text{für } F=0 \ \& \ \dot{F}|_{\mathbf{F}_p=\text{konst.}} \geq 0 \\ = 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.71)$$

definiert.

3.2.1 Verallgemeinerung des Modells von Lemaitre

In Analogie zu Kapitel 3.1.1 wird eine v.Mises Fließfunktion der Form

$$F = \bar{F}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}, k, d) = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\hat{\mathbf{P}}}{1-d} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right)^D \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{P}}}{1-d} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right)^D} - k \quad (3.72)$$

im Raum der Mandel'schen Spannungstensoren definiert. Für die Fließregel (3.70) erhält man somit

$$\hat{\mathbf{D}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Lambda}{1-d} \hat{\mathbf{N}} \quad , \quad \hat{\mathbf{N}} = \frac{\left(\frac{\hat{\mathbf{P}}}{1-d} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right)^D}{\left\| \left(\frac{\hat{\mathbf{P}}}{1-d} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right)^D \right\|} . \quad (3.73)$$

Im Falle plastischer Beanspruchung wird der Proportionalitätsfaktor Λ bzw. die Rate der plastischen Bogenlänge

$$\dot{s} := \sqrt{\frac{2}{3} \hat{\mathbf{D}}_p \cdot \hat{\mathbf{D}}_p} = \frac{\Lambda}{1-d} \quad (3.74)$$

aus der Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$ gewonnen.

Ergänzen der Dissipationsungleichung (3.68) um einen neutralen Term führt zu

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{P}}}{1-d} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{k}{1-d} \dot{r} + \hat{\boldsymbol{\xi}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - \frac{\Omega}{1-d} \dot{d} \geq 0 \quad , \quad (3.75)$$

bzw. unter Einbeziehung der Definition (3.69) zu

$$\underbrace{\left(\frac{\hat{\mathbf{P}}}{1-d} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{k}{1-d} \dot{r}}_{(A)} + \underbrace{\hat{\mathbf{Z}} \cdot \left(\hat{\mathbf{D}}_p - \frac{\dot{\mathbf{Y}}}{1-d} + 2 \hat{\boldsymbol{\Phi}} \hat{\mathbf{D}}_p \right)}_{(B)} - \underbrace{\frac{\Omega}{1-d} \dot{d}}_{(C)} \geq 0 \quad . \quad (3.76)$$

Unter Beibehaltung der Beziehungen (3.18) und (3.21) ist Term (A) stets größer oder gleich Null und die Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung ist durch (3.23) gegeben. Deshalb genügt es im folgenden hinreichende Bedingungen zu formulieren, so daß die beiden Terme (B) und (C) niemals negativ werden können.

(B) Kinematische Verfestigung

In analoger Vorgehensweise zu Kapitel 3.1.1 wird

$$\Psi_p^{kin}(t) = \bar{\Psi}_p^{kin}(\hat{\mathbf{Y}}) = \frac{c}{2\rho_R} \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} \quad (3.77)$$

mit $c > 0$ vorgegeben, so daß aus (3.63) die Beziehung

$$\hat{\mathbf{Z}} = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{kin}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} = c \hat{\mathbf{Y}} \quad (3.78)$$

resultiert. Einsetzen der Gleichungen (2.39) und (2.18) in Term (B) liefert unter Einbeziehung von (3.78)

$$\hat{\mathbf{Z}} \cdot \left\{ \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{1}{c(1-d)} \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} + 2 \left(\hat{\Phi} - \frac{\hat{\mathbf{Y}}}{1-d} \right) \hat{\mathbf{D}}_p \right\} \geq 0 \quad . \quad (3.79)$$

Wählt man den Ausdruck in der geschweiften Klammer nichtnegativ proportional zu $\hat{\mathbf{Z}}$

$$\hat{\mathbf{D}}_p - \frac{1}{c(1-d)} \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} + 2 \left(\hat{\Phi} - \frac{\hat{\mathbf{Y}}}{1-d} \right) \hat{\mathbf{D}}_p = \kappa_p \hat{\mathbf{Z}} \quad (3.80)$$

mit dem Proportionalitätsfaktor

$$\kappa_p = \frac{b}{c} \dot{s} \quad (b \geq 0) \quad , \quad (3.81)$$

so ist obige Ungleichung mit Sicherheit gewährleistet und man erhält als Evolutionsgleichung für die kinematische Verfestigung

$$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = (1-d) \left(c \hat{\mathbf{D}}_p - b \dot{s} \hat{\mathbf{Z}} \right) + 2c(1-d) \left(\hat{\Phi} - \frac{\hat{\mathbf{Y}}}{1-d} \right) \hat{\mathbf{D}}_p \quad . \quad (3.82)$$

Unter der Voraussetzung, daß

$$\hat{\Phi} = \frac{\hat{\mathbf{Y}}}{1-d} \quad (3.83)$$

geht (3.82) über in eine Evolutionsgleichung vom Armstrong-Frederick-Typ

$$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = (1-d) \left(c \hat{\mathbf{D}}_p - b \dot{s} \hat{\mathbf{Z}} \right) \quad . \quad (3.84)$$

Setzt man Beziehung (3.83) in (3.69) ein, so nimmt der Translationstensor der kinematischen Verfestigung die Form

$$\hat{\xi} = \left(\mathbf{1} - \frac{2}{1-d} \hat{\mathbf{Y}} \right) \hat{\mathbf{Z}} \quad (3.85)$$

an¹³.

¹³Im Falle $d=0$ besitzt $\hat{\xi}$ exakt die gleiche mathematische Struktur wie $\hat{\mathbf{P}}$, man muß lediglich $\hat{\Gamma}_e$ durch $\hat{\mathbf{Y}}$ und $\hat{\mathbf{T}}$ durch $\hat{\mathbf{Z}}$ ersetzen.

(C) Schädigung

Der elastische Anteil der spezifischen freien Energiefunktion wird durch

$$\Psi_e(t) = \bar{\Psi}_e(\hat{\Gamma}_e, \mathbf{d}) = \frac{1}{2\rho_R} (1-d) \mathbf{C}[\hat{\Gamma}_e] \cdot \hat{\Gamma}_e \quad (3.86)$$

approximiert. Somit folgt aus den Potentialbeziehungen (3.62) und (3.65):

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}_e}{\partial \hat{\Gamma}_e} = (1-d) \mathbf{C}[\hat{\Gamma}_e] \quad , \quad (3.87)$$

$$\begin{aligned} \Omega &= \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}_e}{\partial d} = -\frac{1}{2} \mathbf{C}[\hat{\Gamma}_e] \cdot \hat{\Gamma}_e \\ &= -\frac{1}{(1-d)^2} \left\{ \frac{1}{4\mu} \hat{\mathbf{T}}^D \cdot \hat{\mathbf{T}}^D + \frac{1}{6(2\mu+3\lambda)} (\text{Sp } \hat{\mathbf{T}})^2 \right\} =: \Omega_e \quad . \end{aligned} \quad (3.88)$$

Sei ferner die zeitliche Entwicklung der Schädigung durch (3.56) gegeben, so ist auch Ungleichung (C) in hinreichender Weise befriedigt.

3.2.2 Verallgemeinerung des Modells von Benallal et al.

Die Verallgemeinerung des in Kapitel 3.1.2 vorgestellten Materialmodells von BENALLAL ET AL. auf finite Deformationen sieht eine v.Mises Fließfunktion

$$F = \bar{F}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}, k, d) = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}}{1-d} \right)^D \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}}{1-d} \right)^D} - k \quad (3.89)$$

vor, mit deren Hilfe die Fließregel (3.70) wie folgt dargestellt werden kann:

$$\hat{\mathbf{D}}_p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial \hat{\mathbf{P}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Lambda}{1-d} \hat{\mathbf{N}} \quad , \quad \hat{\mathbf{N}} = \frac{(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D}{\left\| (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \right\|} \quad (3.90)$$

Die Rate der plastischen Bogenlänge ist durch (3.74) gegeben.

Addiert man zur Dissipationsungleichung (3.68) einen neutralen Term, so daß

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}}{1-d} \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{k}{1-d} \dot{r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\xi}}}{1-d} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \cdot \dot{\mathbf{Y}} - \frac{\Omega}{1-d} \dot{d} \geq 0 \quad (3.91)$$

und berücksichtigt (3.69), so ergibt sich

$$\underbrace{\left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}}{1-d} \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{k}{1-d} \dot{r}}_{(A)} + \underbrace{\hat{\mathbf{Z}} \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{D}}_p}{1-d} - \frac{\dot{\mathbf{Y}}}{1-d} + 2 \hat{\boldsymbol{\Phi}} \frac{\hat{\mathbf{D}}_p}{1-d} \right)}_{(B)} - \underbrace{\frac{\Omega}{1-d} \dot{d}}_{(C)} \geq 0 \quad . \quad (3.92)$$

Es kann gezeigt werden, daß unter Annahme der Beziehungen (3.21), (3.88), (3.56) die Terme (A) und (C) stets größer oder gleich Null sind.

(B) Kinematische Verfestigung

Die unter Einbeziehung der Gleichungen (2.39), (2.18) und (3.78) verbleibende Restungleichung

$$\hat{\mathbf{Z}} \cdot \left\{ \frac{\hat{\mathbf{D}}_p}{1-d} - \frac{\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}}}{c(1-d)} + \frac{2}{1-d} (\hat{\Phi} - \hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{D}}_p \right\} \geq 0 \quad (3.93)$$

ist in hinreichender Weise erfüllt, wenn

$$\frac{\hat{\mathbf{D}}_p}{1-d} - \frac{\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}}}{c(1-d)} + \frac{2}{1-d} (\hat{\Phi} - \hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{D}}_p = \kappa_p \hat{\mathbf{Z}} \quad (3.94)$$

Sei der nichtnegative Proportionalitätsfaktor κ_p durch (3.81) gegeben, so erhält man als Evolutionsgleichung für die kinematische Verfestigung

$$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = c \hat{\mathbf{D}}_p - (1-d) b \dot{s} \hat{\mathbf{Z}} + 2c (\hat{\Phi} - \hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{D}}_p \quad (3.95)$$

die unter der Voraussetzung

$$\hat{\Phi} = \hat{\mathbf{Y}} \quad (3.96)$$

in eine Entwicklungsgleichung vom Armstrong-Frederick-Typ

$$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = c \hat{\mathbf{D}}_p - (1-d) b \dot{s} \hat{\mathbf{Z}} \quad (3.97)$$

überführt werden kann. Aufgrund der Beziehung (3.96) läßt sich der Translationstensor der kinematischen Verfestigung wie folgt darstellen¹⁴:

$$\hat{\xi} := (1 + 2\hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{Z}} \quad (3.98)$$

3.2.3 Verallgemeinerung des Modells B

Der Vorgehensweise in Kapitel 3.1.3 folgend, werden in der Fließfunktion alle Spannungen durch effektive Spannungen ersetzt. Dies führt zu einer Fließfunktion

$$\mathbf{F} = \bar{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{P}}, \hat{\xi}, k, d) = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}}{1-d} \right)^D \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\xi}}{1-d} \right)^D} - \frac{k}{1-d} \quad (3.99)$$

und einer Normalenregel entsprechend (3.90), wobei wiederum (3.74) gilt. Die Dissipationsungleichung ist durch (3.92) gegeben. Vermöge den Beziehungen (3.43) und (3.45) kann man sich vergegenwärtigen, daß Term (A) in (3.92) stets größer oder gleich Null ist, und die isotrope Verfestigung der Gleichung (3.46) unterliegt.

¹⁴Es sei darauf hingewiesen, daß bei der Verallgemeinerung dieses Modells auf finite Deformationen $\hat{\xi}$ exakt die gleiche mathematische Struktur besitzt wie $\hat{\mathbf{P}}$.

(B) Kinematische Verfestigung

Die Auswertung der Potentialbeziehung (3.63) führt unter der Annahme

$$\Psi_p^{kin}(t) = \bar{\Psi}_p^{kin}(\hat{\mathbf{Y}}, d) = (1-d) \frac{c}{2\rho_R} \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} \quad (3.100)$$

mit $c > 0$ zu

$$\hat{\mathbf{Z}} = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{kin}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} = (1-d) c \hat{\mathbf{Y}} \quad (3.101)$$

Unter Einbeziehung der Gleichungen (2.39), (2.18) und (3.101) geht Ungleichung (B) über in

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \cdot \left\{ \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{1}{c} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right)^\nabla + 2 (\hat{\Phi} - \hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{D}}_p \right\} \geq 0 \quad (3.102)$$

Der üblichen Argumentation folgend, wird

$$\hat{\mathbf{D}}_p - \frac{1}{c} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right)^\nabla + 2 (\hat{\Phi} - \hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{D}}_p = \kappa_p \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \quad (3.103)$$

vorgegeben und κ_p entsprechend (3.81) gewählt, so daß

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right)^\nabla = c \hat{\mathbf{D}}_p - b \dot{s} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) + 2c (\hat{\Phi} - \hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{D}}_p \quad (3.104)$$

Setzt man

$$\hat{\Phi} = \hat{\mathbf{Y}} \quad (3.105)$$

so folgt aus (3.104) der gewünschte Armstrong-Frederick Ansatz

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right)^\nabla = c \hat{\mathbf{D}}_p - b \dot{s} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \quad (3.106)$$

Der Translationstensor der kinematischen Verfestigung besitzt aufgrund der Beziehung (3.105) exakt dieselbe mathematische Struktur wie der Mandel'sche Spannungstensor. Er ist somit durch Gleichung (3.98) bestimmt.

(C) Schädigung

Ausgehend von (3.86), (3.43), (3.100) folgt aus (3.62), (3.65) ein Elastizitätsgesetz der Form (3.87) sowie eine additive Zerlegung der Größe Ω entsprechend (3.52). Die drei Summanden sind durch die Gleichungen (3.88), (3.54) und die Beziehung

$$\Omega_p^{kin} = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{kin}}{\partial d} = -\frac{c}{2} \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} \quad (3.107)$$

festgelegt. Die Entwicklungsgleichung (3.56) stellt sicher, daß $\dot{d} \geq 0$ ist und somit auch der dritte Term in (3.92) niemals negativ werden kann.

3.2.4 Zusammenfassende Darstellung und Diskussion

Die in Kapitel 2.2 für kleine Deformationen formulierten Materialmodelle wurden in Anlehnung an die in [97] erläuterte Theorie auf finite Deformationen übertragen. Die konstitutiven Gleichungen sind in Tabelle 3.2 zusammengefaßt. Alle drei Modelle beruhen auf einer linearen Elastizitätsbeziehung. Sie unterliegen einer im Raum der Mandel'schen Spannungstensoren definierten v.Mises Fließfunktion mit isotroper und kinematischer Verfestigung. Die Besonderheit dieser Theorie liegt einerseits in der Wahl der Spannungs- und Verzerrungstensoren sowie den entsprechenden Zeitableitungen, andererseits in der Modellierung der kinematischen Verfestigung, deren Evolutionsgleichung nicht mit dem Translationstensor $\hat{\xi}$ formuliert wird, sondern mit dem inneren Spannungstensor \hat{Z} . Die tensorielle Größe $\hat{\xi}$ ist durch eine nichtlineare Funktion von \hat{Z} gegeben, und \hat{Z} selbst ist nichtlinearer Natur. TSAKMAKIS hat in [98] gezeigt, daß ein solches hochgradig nichtlineares Modell im Falle einachsigen Zugs, einfacher Scherung und einfacher Torsion sinnvolle Spannungs-Dehnungsantworten liefert, allerdings wurde hierbei keine Schädigung berücksichtigt.

Abbildung 3.6 zeigt das Materialverhalten der drei auf finite Deformationen verallgemeinerten Materialmodelle bei einachsiger Zugbeanspruchung. Die einachsig formulierten Materialgleichungen wurden mit einem Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung integriert. Die Größe σ_w entspricht der Axialkomponente des gewichteten Cauchy'schen Spannungstensors¹⁵ und Z_{11} der Axialkomponente der inneren Spannung in der Momentankonfiguration $\mathbf{Z} = \mathbf{F}_e \hat{Z} \mathbf{F}_e^T$. Es wird deutlich, daß eine Verallgemeinerung der Modelle von LEMAITRE bzw. BENALLAL ET AL. auf finite Deformationen im Rahmen der hier betrachteten Thermodynamik dazu führt, daß die Cauchy-Spannung mit zunehmender Schädigung gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert strebt. Infolgedessen ist der Zustand maximaler Schädigung ($d \rightarrow 1$) bei diesen beiden Modellen durch beliebig große elastische Verzerrungen charakterisiert (siehe hierzu Gleichung (3.87)). Bei kleinen Deformationen war dies nur beim Modell von BENALLAL ET AL. der Fall. Grundsätzlich unterschiedliches Verhalten zeigen die drei Modelle auch hinsichtlich der plastischen inneren Variablen Z_{11} und k . Während bei den verallgemeinerten Modellen von LEMAITRE bzw. BENALLAL ET AL. Z_{11} stetig ansteigt und k gegen eine obere Grenze strebt, ist Modell B dadurch gekennzeichnet, daß diese beiden Größen mit zunehmender Schädigung gegen Null gehen. Auch in Bezug auf den Schädigungsverlauf weisen die verallgemeinerten Modelle von LEMAITRE bzw. BENALLAL ET AL. ein ungewöhnliches Verhalten auf. Bei beiden Modellen verläuft die Schädigung mit zunehmender Dehnung asymptotisch gegen eins und nur Modell B zeigt eine nahezu lineare Entwicklung der Schädigung mit fortschreitender Dehnung.

¹⁵Es sei darauf hingewiesen, daß im Falle einachsiger Beanspruchung der Mandel'sche Spannungstensor und der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor zusammenfallen.

Tab. 3.2: Auf große Deformationen verallgemeinerte Materialmodelle von LEMAITRE, BENALLAL ET AL. sowie Modell B

$$\hat{\mathbf{T}} = (1-d) \mathbf{C} [\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{\Gamma}}_p]$$

LEMAITRE	BENALLAL ET AL.	MODELL B
$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\ \left(\frac{\hat{\mathbf{P}}}{1-d} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right)^D \right\ - k$	$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\ \left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}}{1-d} \right)^D \right\ - k$	$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\ \left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}}{1-d} \right)^D \right\ - \frac{k}{1-d}$
$\hat{\mathbf{D}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \hat{\mathbf{N}}$	$\hat{\mathbf{D}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \hat{\mathbf{N}}$	$\hat{\mathbf{D}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \hat{\mathbf{N}}$
$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\left(\frac{\hat{\mathbf{P}}}{1-d} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right)^D}{\left\ \left(\frac{\hat{\mathbf{P}}}{1-d} - \hat{\boldsymbol{\xi}} \right)^D \right\ }$	$\hat{\mathbf{N}} = \frac{(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D}{\left\ (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \right\ }$	$\hat{\mathbf{N}} = \frac{(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D}{\left\ (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \right\ }$
$\dot{k} = (1-d) \phi(\gamma - \beta(k-h)) \dot{s}$	$\dot{k} = (1-d) \phi(\gamma - \beta(k-h)) \dot{s}$	$\left(\frac{k}{1-d} \right) \dot{} = \phi \left(\gamma - \beta \left(\frac{k}{1-d} - h \right) \right) \dot{s}$
$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = (1-d) \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c \hat{\mathbf{N}} - b \hat{\mathbf{Z}} \right) \dot{s}$	$\overset{\nabla}{\hat{\mathbf{Z}}} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c \hat{\mathbf{N}} - (1-d) b \hat{\mathbf{Z}} \right) \dot{s}$	$\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \overset{\nabla}{\phantom{\hat{\mathbf{Z}}}} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c \hat{\mathbf{N}} - b \frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \dot{s}$
$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \hat{\mathbf{Z}} + \frac{2}{c(1-d)} \hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}$	$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \hat{\mathbf{Z}} + \frac{2}{c} \hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}$	$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \hat{\mathbf{Z}} + \frac{2}{c(1-d)} \hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}$
$\dot{d} = \left(a_0 + (a_1 + a_2 d) \frac{(-\Omega_e)^n}{(1-d)^q} \right) \dot{s}$		
$\Omega_e = -\frac{1}{(1-d)^2} \left\{ \frac{1}{4\mu} \hat{\mathbf{T}}^D \cdot \hat{\mathbf{T}}^D + \frac{1}{6(2\mu+3\lambda)} (\text{Sp } \hat{\mathbf{T}})^2 \right\}$		
$\dot{F} = 0 \Rightarrow \dot{s} \quad \text{für } F=0 \text{ \& } \dot{F} _{F=0} \geq 0$		
$\dot{s} = 0 \quad \text{sonst}$		

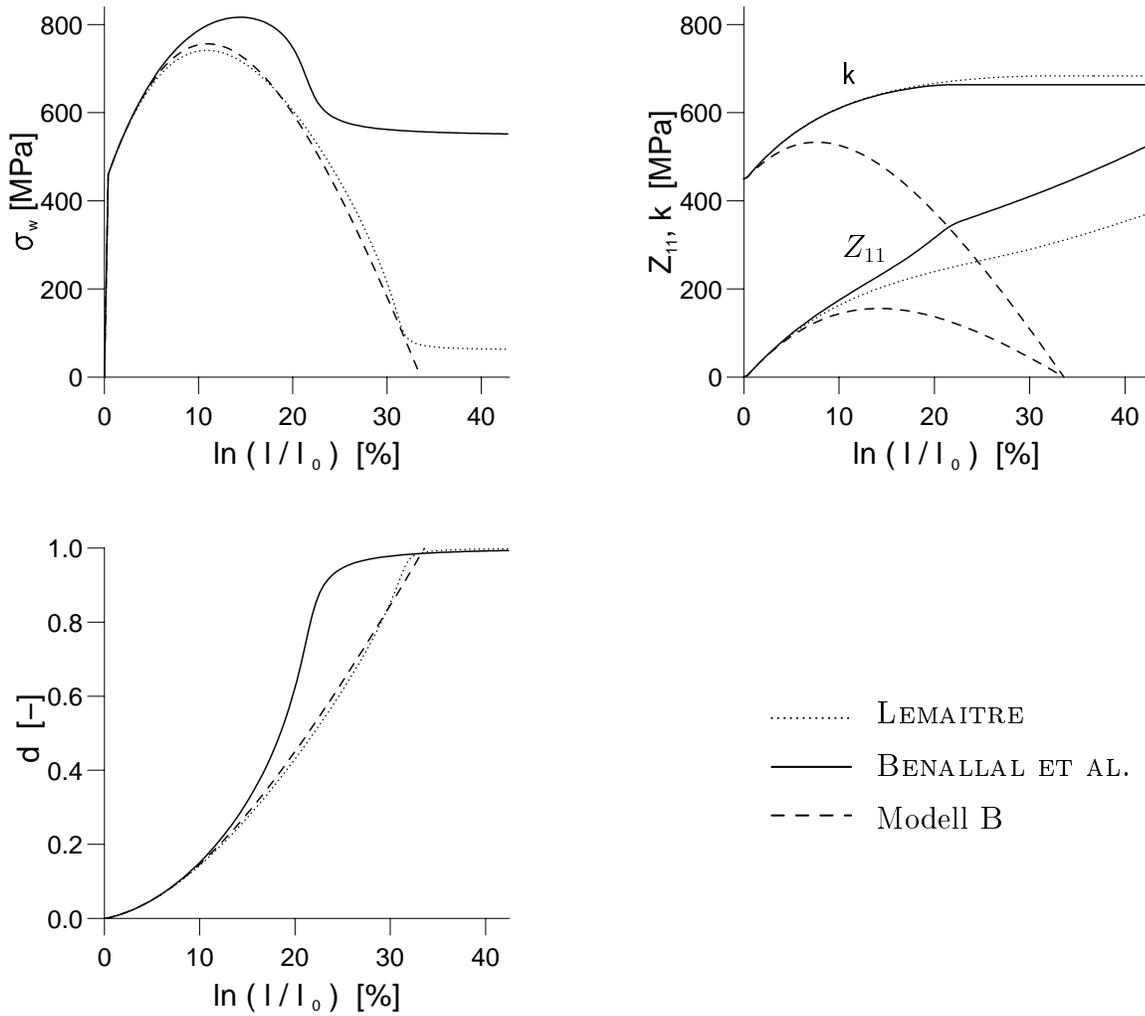


Abb. 3.6: Spannungsverläufe σ_w , Z_{11} und k sowie Entwicklung der Schädigung bei einachsigem Zug für die drei auf große Deformationen verallgemeinerten Materialmodelle; $E = 200\,000$ MPa, $h = k_0 = 450$ MPa, $\Phi = 1$, $\beta = 10$, $\gamma = 2700$ MPa, $b = 10$, $c = 2500$ MPa, $a_0 = 0$, $a_1 = 1.25$ MPa⁻¹, $a_2 = 0$ MPa⁻¹, $n = 1$, $q = 0$.

3.3 Vereinfachte konstitutive Beziehungen

3.3.1 Vereinfachte kinematische Verfestigung

Die numerische Integration der kinematischen Verfestigungsregel läßt sich erheblich vereinfachen, wenn die nichtlinearen Terme in $\hat{\xi}$ unberücksichtigt bleiben, d.h.

$$\hat{\xi} \equiv \hat{\mathbf{Z}} \quad (3.108)$$

gesetzt wird. In Anbetracht dessen verbleibt zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen eine auf (3.108) basierenden konstitutive Theorie die Dissipationsungleichung in hinreichender Weise befriedigt.

Verallgemeinertes Modell von Lemaitre

Damit Ungleichung (3.75) für alle denkbaren thermodynamischen Prozesse stets erfüllt ist, muß gezeigt werden, daß

$$\hat{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \cdot \dot{\mathbf{Y}} \geq 0 \quad . \quad (3.109)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (3.78) und (2.39) zusammen mit (2.18) und (3.84) läßt sich (3.109) wie folgt darstellen:

$$\frac{b}{c} \dot{s} \hat{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\mathbf{Z}} - \frac{2}{c(1-d)} \hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p \geq 0 \quad . \quad (3.110)$$

Einige algebraische Umformungen unter Einbeziehung der Definition (3.74) führen zu

$$\left(b - \frac{\sqrt{6}}{1-d} \frac{\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}}{\|\hat{\mathbf{Z}}\|^2} \cdot \frac{\hat{\mathbf{D}}_p}{\|\hat{\mathbf{D}}_p\|} \right) \geq 0 \quad . \quad (3.111)$$

Da $\|\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}\| \leq \|\hat{\mathbf{Z}}\|^2$ kann diese Ungleichung im allgemeinen nur erfüllt werden, wenn die Materialkonstante b der Bedingung

$$b \geq \frac{\sqrt{6}}{1-d} \quad (3.112)$$

genügt. Es wird deutlich, daß für $d \rightarrow 1$ die rechte Seite von (3.112) gegen unendlich strebt. Unter diesen Umständen scheint die Vereinfachung (3.108) für dieses Modell nicht zulässig, da eine Verletzung der Dissipationsungleichung (3.75) nicht ausgeschlossen werden kann.

Verallgemeinertes Modell von Benallal et al.

In analoger Vorgehensweise läßt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (3.78), (2.39), (2.18) und (3.97) bzw. der Definition (3.74) als hinreichende Bedingung zur Erfüllung der Ungleichung (3.91) die Restriktion

$$b \geq \frac{\sqrt{6}}{1-d}$$

ableiten. Eine Vereinfachung im Sinne von (3.108) scheint somit auch für dieses Modell unzulässig.

Verallgemeinertes Modell B

Mit Hilfe der Beziehungen (3.101), (2.39), (2.18), (3.106) und (3.74) kann gezeigt werden, daß der zweite Term in (3.91) unter der Voraussetzung

$$b \geq \sqrt{6} \tag{3.113}$$

einen nichtnegativen Beitrag liefert¹⁶. Im Gegensatz zu den beiden anderen Modellen stellt diese Bedingung eine akzeptable Restriktion an den Materialparameter b dar. Dies legt den Schluß nahe, daß eine Vereinfachung der konstitutiven Beziehungen entsprechend (3.108) nur bei diesem Materialmodell angewandt werden sollte. In Anbetracht dieser Überlegungen konzentrieren sich die weiteren Ausführungen einzig und allein auf Modell B.

3.3.2 Kleine elastische Verzerrungen

Die Annahme kleiner elastischer Deformationen führt zu weiteren Vereinfachungen in den konstitutiven Beziehungen. Es gilt wegen $\|\hat{\mathbf{T}}_e\| \ll 1$ für den elastischen Anteil des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_e \approx \mathbf{R}_e \tag{3.114}$$

Einsetzen der Gleichungen (2.27)₁, (2.26)₁ und (2.13) in Definition (3.66) liefert aufgrund der Eigenschaft (3.114)

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_e^T \mathbf{F}_e \hat{\mathbf{T}} \approx \hat{\mathbf{T}} \tag{3.115}$$

¹⁶Die gleiche einschränkende Bedingung an die Materialkonstante b erhält man auch ohne Schädigung (siehe hierzu KAMLAH [48, S.145f]).

¹⁷ \mathbf{R}_e entspricht dem elastischen Rotationsanteil in der polaren Zerlegung $\mathbf{F}_e = \mathbf{R}_e \mathbf{U}_e$. \mathbf{U}_e repräsentiert den elastischen rechten Strecktensor.

Bildet man die materielle Zeitableitung der Elastizitätsbeziehung (3.87), so erhält man unter Verwendung von (2.32) und (2.39)

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{T}}}{1-d}\right)^\nabla - \mathbf{c}[\hat{\mathbf{\Gamma}}_e] = -\mathbf{c}[\hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_e \hat{\mathbf{L}}_p] - \hat{\mathbf{L}}_p \mathbf{c}[\hat{\mathbf{\Gamma}}_e] - \mathbf{c}[\hat{\mathbf{\Gamma}}_e] \hat{\mathbf{L}}_p^T. \quad (3.116)$$

Weiterhin sind kleine elastische Verzerrungen in dem Sinne aufzufassen, daß alle Terme auf der rechten Seite von (3.116) vernachlässigt werden können. Dies bedeutet, daß die Hyperelastizitätsbeziehung (3.87) durch ein Hypoelastizitätsgesetz der Form

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{T}}}{1-d}\right)^\nabla = \mathbf{c}[\hat{\mathbf{\Gamma}}_e] = \mathbf{c}[\hat{\mathbf{\Gamma}} - \hat{\mathbf{\Gamma}}_p] \quad (3.117)$$

angenähert werden kann.

3.3.3 Zusammenfassende Darstellung und Diskussion

Abschließend werden die in der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathbf{R}}_t$ formulierten konstitutiven Gleichungen mit Hilfe des Konzepts der dualen Variablen in die Momentankonfiguration \mathbf{R}_t transformiert. Verwendet man hierzu Gleichung (3.114) sowie die in Anhang A.1, A.2 und A.5 angegebenen Beziehungen, so führt dies zu dem in Tabelle 3.3 zusammengefaßten System von Materialgleichungen. Aufgrund der Eigenschaft (3.114) bleibt die Struktur der Materialgleichungen bei einer Vorwärtstransformation von $\hat{\mathbf{R}}_t$ nach \mathbf{R}_t erhalten, lediglich die Variablen ändern sich. Ein Vergleich mit der geometrisch linearen Formulierung (Tabelle 3.1) macht deutlich, daß die Evolutionsgleichungen ihre Struktur im wesentlichen beibehalten¹⁸. Das Elastizitätsgesetz wird allerdings durch ein Hypoelastizitätsgesetz approximiert und die materiellen Zeitableitungen der tensoriellen Größen werden durch objektive Zeitableitungen ersetzt. Abbildung 3.7 macht deutlich, daß bei einachsiger Zugbeanspruchung die Unterschiede zwischen der in Kapitel 2.3.3 erläuterten „exakten thermodynamischen Formulierung“ und der vereinfachten Version rein quantitativer Natur sind. Insbesondere sei darauf hingewiesen, daß die Vereinfachung $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \hat{\mathbf{Z}}$ keinen großen Einfluß auf die Spannungs-Dehnungskennlinie ausübt.

¹⁸Dies hat den Vorteil, daß in beiden Fällen der gleiche Spannungsalgorithmus benutzt werden kann.

Tab. 3.3: Modell B unter der Voraussetzung kleiner elastischer, großer plastischer Deformationen und der Vereinfachung $\hat{\xi} = \hat{Z}$

$$\left(\frac{\mathbf{S}}{1-d}\right)^\nabla = \mathbf{C}[\mathbf{D} - \hat{\mathbf{A}}_p]$$

$$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \left(\frac{\mathbf{S} - \mathbf{Z}}{1-d}\right)^D \right\| - \frac{k}{1-d}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \mathbf{N} \quad , \quad \mathbf{N} = \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{Z})^D}{\|(\mathbf{S} - \mathbf{Z})^D\|}$$

$$\left(\frac{k}{1-d}\right)^\cdot = \phi \left(\gamma - \beta \left(\frac{k}{1-d} - h \right) \right) \dot{s}$$

$$\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right)^\nabla = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c \mathbf{N} - b \frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) \dot{s}$$

$$\dot{d} = \left(a_0 + (a_1 + a_2 d) \frac{(-\Omega_e)^n}{(1-d)^q} \right) \dot{s}$$

$$\Omega_e = -\frac{1}{(1-d)^2} \left\{ \frac{1}{4\mu} \mathbf{S}^D \cdot \mathbf{S}^D + \frac{1}{6(2\mu + 3\lambda)} (\text{Sp } \mathbf{S})^2 \right\}$$

$$\dot{F} = 0 \Rightarrow \dot{s} \quad \text{für } F=0 \ \& \ \dot{F}|_{\mathbf{F}_p=\text{konst.}} \geq 0$$

$$\dot{s} = 0 \quad \text{sonst}$$

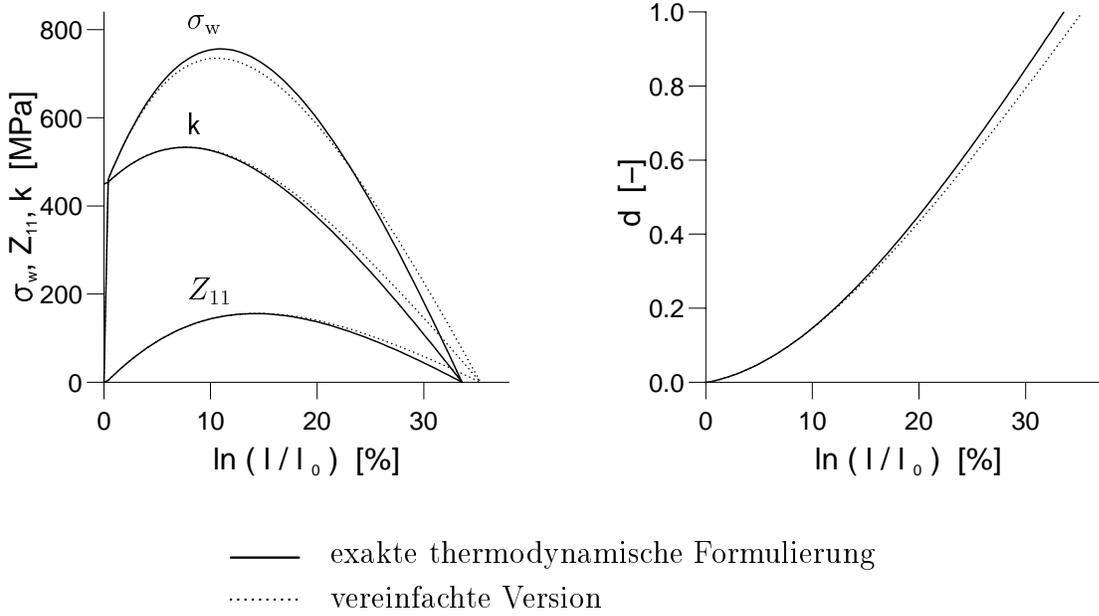


Abb. 3.7: Spannungsverläufe σ_w , Z_{11} und k sowie Entwicklung der Schädigung bei einachsigen Zug für Modell B; $E = 200\,000$ MPa, $h = k_0 = 450$ MPa, $\Phi = 1$, $\beta = 10$, $\gamma = 2700$ MPa, $b = 10$, $c = 2500$ MPa, $a_0 = 0$, $a_1 = 1.25$ MPa⁻¹, $a_2 = 0$ MPa⁻¹, $n = 1$, $q = 0$.

4 Erweiterung auf Thermo(visko)plastizität mit Schädigung

Aufgrund der Erkenntnisse im vorherigen Kapitel wird im folgenden nur Modell B auf *Thermoviskoplastizität* erweitert.

Bei thermischer Aktivierung kommt es oberhalb bestimmter Temperaturen zu einem Energieabbau durch Ausheilen und Umordnen von Gitterdefekten, beispielsweise durch Kondensation von Leerstellen, Annihilation von Versetzungen unterschiedlichen Vorzeichens oder Bildung von Kleinwinkelkorngrenzen. Dieses bevorzugt bei hohen Temperaturen auftretende Phänomen bezeichnet man auch als *statische Erholung* (*static Recovery*). Die entsprechenden statischen Erholungsterme werden in den Evolutionsgleichungen der isotropen und der kinematische Verfestigung berücksichtigt. Sie führen bei zeitabhängigem Materialverhalten zu einer Abnahme der Verfestigung.

Wie bereits zuvor wird die thermodynamische Konsistenz der Materialgleichungen anhand der Clausius-Duhem-Ungleichung überprüft. Auf den Sonderfall der *Thermoplastizität* wird in den Ausführungen ebenfalls eingegangen. Diese kann durch einen geschwindigkeitsabhängigen Grenzübergang (für unendlich langsame Belastungsgeschwindigkeiten) aus der Thermoviskoplastizität abgeleitet werden. Da plastisches Materialverhalten geschwindigkeitsunabhängig ist, spielen die statischen Erholungsterme keine Rolle. Abschließend wird untersucht unter welchen Voraussetzungen die in Kapitel 3.3 getroffenen Vereinfachungen der Clausius-Duhem-Ungleichung genüge leisten.

4.1 Thermodynamische Betrachtungen bei großen Deformationen

Ausgehend von einer additiven Zerlegung der Deformation entsprechend (2.27)₃ wird eine spezifische freie Energiefunktion der Form

$$\Psi(t) = \bar{\Psi}(\hat{\Gamma}_{et}, \hat{\mathbf{Y}}, r, \mathbf{d}, \theta) = \Psi_{et}(t) + \Psi_p(t) \quad (4.1)$$

eingeführt, die additiv in einen thermoelastischen und einen inelastischen Anteil zerlegt werden kann. Mit Hilfe der Beziehungen (2.38), (4.1), der Zerlegung der Deformation (2.27)₃ sowie der Definition der unteren Oldroyd-Ableitung (2.32) kann die Clausius-Duhem-Ungleichung (2.64) wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\mathbf{T}} - \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}} \right) \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} - \rho_R \left(\eta_* + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_p + \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}} \cdot \left(\hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} \hat{\mathbf{L}}_p \right) - \\ & \rho_R \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{d}} \dot{\mathbf{d}} \right) - \frac{(\det \mathbf{F})}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 . \end{aligned} \quad (4.2)$$

Unter der Annahme elastischer Isotropie gilt die Beziehung $\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}}$, die zusammen mit (2.18) und (2.35) dazu führt, daß die Ungleichung (4.2) auch in der Form

$$\begin{aligned} & \left(\hat{\mathbf{T}} - \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}} \right) \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} - \rho_R \left(\eta_* + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} + \left(\hat{\mathbf{T}} + 2 \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \\ & \rho_R \left(\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial r} \dot{r} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{d}} \dot{\mathbf{d}} \right) - \frac{(\det \mathbf{F})}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

geschrieben werden kann. Die übliche Vorgehensweise (siehe hierzu [24, 50]) führt zu den Potentialbeziehungen

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}} \quad , \quad \eta_* = - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} . \quad (4.4)$$

Während im Falle der Viskoplastizität die Beziehungen (4.4)₁ und (4.4)₂ eine notwendige und hinreichende Bedingung zur Erfüllung der Clausius-Duhem-Ungleichung darstellen¹, ist es bei Plastizität nicht möglich Potentialeigenschaften der Form (4.4)₁ und (4.4)₂ als notwendig für die Gültigkeit der Clausius-Duhem-Ungleichung herzuleiten. Geht man dennoch davon aus, daß die Beziehungen (4.4)₁ und (4.4)₂ auch im Falle der Plastizität gelten mögen², so folgt unter Berücksichtigung der Definitionen (3.63), (3.64), (3.65) und dem Mandel'schen Spannungstensor

$$\hat{\mathbf{P}} := \left(\mathbf{1} + 2 \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} \right) \hat{\mathbf{T}} \quad (4.5)$$

die Restungleichung

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - k \dot{r} - \Omega \dot{\mathbf{d}} - \frac{(\det \mathbf{F})}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 . \quad (4.6)$$

Im folgenden wird (4.6) in zwei Anteile aufgespalten und gefordert, daß beide Anteile nicht-negativ sind. Man erhält somit für die *innere Dissipation*

$$\hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \hat{\mathbf{Z}} \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - k \dot{r} - \Omega \dot{\mathbf{d}} \geq 0 \quad (4.7)$$

¹siehe COLEMAN & GURTIN [24].

²KRATOCHVIL & DILLON [50] beispielsweise rechtfertigen diese Annahme durch einen Grenzübergang von der geschwindigkeitsabhängigen Viskoplastizität zur geschwindigkeitsunabhängigen Plastizität.

bzw. für die *thermische Dissipation*

$$-\frac{(\det \mathbf{F})}{\theta} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \quad . \quad (4.8)$$

Ferner wird vorausgesetzt, daß der Wärmeflußvektor durch das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} [\mathbf{g}] \quad (4.9)$$

bestimmt ist, wobei der Wärmeleitensor \mathbf{K} einem symmetrischen, positiv definiten Tensor zweiter Stufe entspricht. Infolgedessen ist Ungleichung (4.8) stets erfüllt, und es verbleibt (4.7) bzw. nach Umformung

$$\underbrace{\left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}}{1-d} \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{k}{1-d} \dot{\gamma}}_{(A)} + \underbrace{\hat{\mathbf{Z}} \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{D}}_p}{1-d} - \frac{\hat{\mathbf{Y}}}{1-d} + 2\hat{\Phi} \frac{\hat{\mathbf{D}}_p}{1-d} \right)}_{(B)} - \underbrace{\frac{\Omega}{1-d} \dot{d}}_{(C)} \geq 0 \quad (4.10)$$

als Restriktion an die Evolutionsgleichungen der inneren Variablen k , $\hat{\mathbf{Z}}$ und d (siehe hierzu Kapitel 3.2.2). Der Translationstensor der kinematischen Verfestigung $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ ist gemäß (3.69) durch

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} := (\mathbf{1} + 2\hat{\Phi}) \hat{\mathbf{Z}} \quad , \quad (4.11)$$

die Fließfunktion F durch (3.99)

$$F = \bar{F} (\hat{\mathbf{P}}, \hat{\boldsymbol{\xi}}, k, d) = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}}{1-d} \right)^D \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}}}{1-d} \right)^D - \frac{k}{1-d}} \quad (4.12)$$

und die Fließregel entsprechend (3.90) und (3.74) durch

$$\hat{\mathbf{D}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \hat{\mathbf{N}} \quad , \quad \hat{\mathbf{N}} = \frac{(\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D}{\left\| (\hat{\mathbf{P}} - \hat{\boldsymbol{\xi}})^D \right\|} \quad (4.13)$$

gegeben. Im Falle der Viskoplastizität ist \dot{s} durch eine Materialgleichung der Form

$$\dot{s} = \frac{\langle F \rangle^m}{\eta} \quad (4.14)$$

festgelegt, wobei F einer Überspannung entspricht und m , η positive Materialfunktionen von θ sind³.

³Es sei nochmals in Erinnerung gerufen, daß im Falle der Plastizität \dot{s} aus der Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$ bestimmt wird.

Die Zerlegung des inelastischen Anteils der spezifischen freien Energiefunktion in zwei Summanden entsprechend (3.11) ermöglicht eine separate Untersuchung der thermodynamischen Konsistenz der Evolutionsgleichungen beider Verfestigungsmechanismen.

(A) Isotrope Verfestigung

In Analogie zu Kapitel 2.2.3 wird für Ψ_p^{iso} ein Ansatz

$$\Psi_p^{iso}(t) = \bar{\Psi}_p^{iso}(r, \mathbf{d}, \theta) = \frac{(1-\mathbf{d})}{\rho_R} \left(\frac{1}{2} \gamma r^2 + h r \right) \quad (4.15)$$

gewählt, wobei $\gamma = \gamma(\theta)$, $h = h(\theta)$ ($h \leq k_0 = k|_{s=0}$) nichtnegative Materialfunktionen der Temperatur sind. Ausgehend von der Potentialeigenschaft (3.64) erhält man

$$\left(\frac{k}{1-\mathbf{d}} \right)' - \dot{h} = \gamma \dot{r} + \gamma' \dot{\theta} r \quad (4.16)$$

Hier und im folgenden kennzeichnen die Größen ()' die Ableitungen nach der Temperatur. Einsetzen der Gleichungen (4.12), (4.13) in (4.10) liefert für Term (A)

$$F \dot{s} + \frac{k}{1-\mathbf{d}} (\dot{s} - \dot{r}) \geq 0 \quad (4.17)$$

bzw.

$$\dot{s} \geq \dot{r} \quad (4.18)$$

als hinreichende Bedingung zur Erfüllung dieser Ungleichung. Sei

$$\dot{r} = \phi \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{k}{1-\mathbf{d}} - h \right) \right) \dot{s} - \frac{\pi}{\gamma} \left(\frac{k}{1-\mathbf{d}} - h \right)^\omega \quad (4.19)$$

mit den nichtnegativen Materialfunktionen $\beta = \beta(\theta)$, $\pi = \pi(\theta)$, $\omega = \omega(\theta)$, $\phi = \phi(\theta)$ ($\phi \leq 1$), so ist (4.18) stets gewährleistet. Substituiert man \dot{r} in (4.16) durch (4.19), so ergibt sich unter Berücksichtigung der Beziehungen (3.64) und (4.15) folgende Evolutionsgleichung für die isotrope Verfestigung⁴:

$$\left(\frac{k}{1-\mathbf{d}} \right)' - \dot{h} = \phi \left(\gamma - \beta \left(\frac{k}{1-\mathbf{d}} - h \right) \right) \dot{s} + \frac{\gamma'}{\gamma} \dot{\theta} \left(\frac{k}{1-\mathbf{d}} - h \right) - \pi \left(\frac{k}{1-\mathbf{d}} - h \right)^\omega \quad (4.20)$$

⁴Im Fall der Thermoplastizität gilt: $\pi=0$.

(B) Kinematische Verfestigung

Der Anteil Ψ_p^{kin} der spezifischen freien Energiefunktion wird durch die quadratische Form

$$\Psi_p^{kin}(t) = \bar{\Psi}_p^{kin}(\hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{d}, \theta) = \frac{(1-\mathbf{d})}{2\rho_R} c \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} \quad (4.21)$$

mit $c = c(\theta) > 0$ vorgegeben. Somit folgt aus der Potentialeigenschaft (3.63)

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right)' = c \dot{\hat{\mathbf{Y}}} + \frac{c'}{c} \dot{\theta} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) \quad (4.22)$$

Die Beziehungen (3.63), (4.21) und (4.22) zusammen mit (2.18) und (2.39) in (4.10) eingesetzt, liefern für Term (B)

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) \cdot \left\{ \hat{\mathbf{D}}_p - \frac{1}{c} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right)^\nabla + \frac{c'}{c^2} \dot{\theta} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) + 2(\hat{\Phi} - \hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{D}}_p \right\} \geq 0 \quad (4.23)$$

Durch Vorgabe von

$$\hat{\mathbf{D}}_p - \frac{1}{c} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right)^\nabla + \frac{c'}{c^2} \dot{\theta} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) + 2(\hat{\Phi} - \hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{D}}_p = \kappa_p \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) \quad (4.24)$$

mit

$$\kappa_p = \frac{b}{c} \dot{s} + \frac{\mathbf{p}}{c} \left\| \frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right\|^{w-1} \quad (4.25)$$

und den nichtnegativen Materialfunktionen $b = b(\theta)$, $\mathbf{p} = \mathbf{p}(\theta)$, $w = w(\theta)$ ist Ungleichung (4.23) stets erfüllt. Einsetzen des Faktors (4.25) in (4.24) führt zu der Evolutionsgleichung

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right)^\nabla = c \hat{\mathbf{D}}_p - b \dot{s} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) + \frac{c'}{c} \dot{\theta} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) - \mathbf{p} \left\| \frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right\|^{w-1} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) + 2(\hat{\Phi} - \hat{\mathbf{Y}}) \hat{\mathbf{D}}_p \quad (4.26)$$

die unter der Voraussetzung

$$\hat{\Phi} = \hat{\mathbf{Y}} \quad (4.27)$$

in

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right)^\nabla = c \hat{\mathbf{D}}_p - b \dot{s} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) + \frac{c'}{c} \dot{\theta} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) - \mathbf{p} \left\| \frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right\|^{w-1} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-\mathbf{d}} \right) \quad (4.28)$$

übergeht⁵. Der Translationstensor der kinematischen Verfestigung nimmt aufgrund der Beziehung (4.27) die Form (3.98) an.

⁵Im Fall der Thermoplastizität gilt: $\mathbf{p} = 0$. Sei ferner $\dot{\theta} = 0$, so erhält man wie schon in Kapitel 3.2.3 für $\hat{\mathbf{Z}}/(1-\mathbf{d})$ eine Entwicklungsgleichung vom Armstrong-Frederick-Typ.

(C) Schädigung

Der thermoelastische Anteil der spezifischen freien Energiefunktion läßt sich in zwei Anteile

$$\Psi_{et}(t) = \bar{\Psi}_{et}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}, \mathbf{d}, \theta) = \frac{(1-\mathbf{d})}{\rho_R} \bar{\mathbb{H}}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}, \theta) + \frac{1}{\rho_R} \bar{\mathbb{K}}(\theta) \quad (4.29)$$

aufspalten. Der erste Summand wird linear in $(1-\mathbf{d})$ vorgegeben, wobei \mathbb{H} eine isotrope Funktion von $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}$ und eine Funktion von θ ist. Die Potentialbeziehungen (4.4)₁ und (3.65) liefern aufgrund der Zerlegungen (4.1), (3.11) und den Annahmen (4.29), (4.15), (4.21) somit

$$\hat{\mathbf{T}} = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}_{et}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}} = (1-\mathbf{d}) \frac{\partial \bar{\mathbb{H}}}{\partial \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}} \quad , \quad (4.30)$$

$$\Omega = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{d}} = \Omega_{et} + \Omega_p^{iso} + \Omega_p^{kin} \quad (4.31)$$

mit

$$\Omega_{et} = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}_{et}}{\partial \mathbf{d}} = -\bar{\mathbb{H}}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}, \theta) \quad , \quad (4.32)$$

$$\Omega_p^{iso} = \rho_R \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{iso}}{\partial \mathbf{d}} = -\left(\frac{1}{2} \gamma r^2 + h r\right) \quad , \quad (4.33)$$

$$\Omega_p^{kin} = \rho \frac{\partial \bar{\Psi}_p^{kin}}{\partial \mathbf{d}} = -\frac{c}{2} \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} \quad . \quad (4.34)$$

Die Entwicklung der Schädigung wird analog zu Kapitel 3.1.4 durch eine Materialgleichung der Form

$$\dot{\mathbf{d}} = a_0 \dot{s} + (a_1 + a_2 \mathbf{d}) \frac{(-\Omega_{et})^n}{(1-\mathbf{d})^q} \dot{s} \quad (4.35)$$

beschrieben, worin a_0, a_1, a_2, n, q nichtnegative Materialfunktionen der Temperatur repräsentieren. Diese Zusammenhänge machen deutlich, daß Term (C) in (4.10) unter der Voraussetzung $\mathbb{H} \geq 0$ in hinreichender Weise befriedigt ist.

4.2 Wärmeleitungsgleichung

Ausgehend von der materiellen Zeitableitung der Beziehung (2.61) ergibt sich unter Einbeziehung der spezifischen freien Energiefunktion (4.1), der Potentialeigenschaft (4.4)₂, dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik (2.59) und der Gleichung (2.38)

$$\begin{aligned}
 -\theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta^2} \dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial \hat{\Gamma}_{et}} \left(\bar{\Psi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \theta \right) \cdot \dot{\hat{\Gamma}}_{et} &= r_w - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + \frac{1}{\rho_R} \hat{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}} - \\
 \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{Y}}} \left(\bar{\Psi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \theta \right) \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{\Psi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \theta \right) \dot{r} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \left(\bar{\Psi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \theta \right) \dot{\mathbf{d}} &. \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt mit Hilfe der additiven Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeit, der Definition der unteren Oldroyd Ableitung (2.32), der Elastizitätsbeziehung (4.4)₁ sowie den Gleichungen (2.18), (2.35) und (4.5) die *Wärmeleitungsgleichung* in der Form⁶

$$c_\varepsilon \dot{\theta} - w_{et} = r_w - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + w_p - \dot{\varepsilon}_s, \tag{4.37}$$

wobei

$$c_\varepsilon := -\theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta^2} = \theta \frac{\partial \eta_*}{\partial \theta} \tag{4.38}$$

der *spezifischen Wärmekapazität bei konstanter Verzerrung* entspricht. Der Term

$$w_{et} = \theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta \partial \hat{\Gamma}_{et}} \cdot \dot{\hat{\Gamma}}_{et} \tag{4.39}$$

repräsentiert die *thermoelastische Kopplung*, während

$$w_p = \frac{1}{\rho_R} \hat{\mathbf{P}} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_p \tag{4.40}$$

die *spezifische plastische Spannungsleistung* beschreibt. Die Größe $\dot{\varepsilon}_s$ entspricht der in Form von innerer Energie im Material gespeicherten Leistung, die sich aus Beiträgen der inneren Variablen $\hat{\mathbf{Y}}$, r und \mathbf{d} gemäß

$$\dot{\varepsilon}_s = \dot{\varepsilon}_{sr} + \dot{\varepsilon}_{sY} + \dot{\varepsilon}_{sd} \tag{4.41}$$

mit

$$\dot{\varepsilon}_{sr} = \frac{\partial e}{\partial r} \dot{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\bar{\Psi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \theta \right) \dot{r}, \tag{4.42}$$

⁶siehe beispielsweise KRATOCHVIL & DILLON [50].

$$\dot{e}_{sY} = \frac{\partial e}{\partial \hat{Y}} \cdot \dot{\hat{Y}} = \frac{\partial}{\partial \hat{Y}} \left(\bar{\Psi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \theta \right) \cdot \dot{\hat{Y}} , \quad (4.43)$$

$$\dot{e}_{sd} = \frac{\partial e}{\partial d} \dot{d} = \frac{\partial}{\partial d} \left(\bar{\Psi} - \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \theta} \theta \right) \dot{d} \quad (4.44)$$

zusammensetzt.

Es kann gezeigt werden, daß die drei Summanden \dot{e}_{sr} , \dot{e}_{sY} und \dot{e}_{sd} nach einigen algebraischen Umformungen unter Zuhilfenahme der Zerlegungen (4.1), (3.11), der Annahmen (4.15), (4.21), (4.29) sowie den Potentialbeziehungen (3.63), (3.64), (3.65) wie folgt dargestellt werden können:

$$\dot{e}_{sr} = \frac{(1-d)}{\rho_R} \left\{ \frac{k}{1-d} - \frac{\gamma'}{\gamma} \left(\frac{k}{1-d} - h \right) \theta - h' \theta \right\} \dot{r} , \quad (4.45)$$

$$\dot{e}_{sY} = \frac{(1-d)}{\rho_R} \left(1 - \frac{c'}{c} \theta \right) \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \cdot \dot{\hat{\mathbf{Y}}} , \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{sd} = & -\frac{1}{\rho_R} \left\{ \bar{H}(\hat{\Gamma}_{et}, \theta) - \frac{\partial \bar{H}(\hat{\Gamma}_{et}, \theta)}{\partial \theta} \theta + \frac{1}{2} C_r \left(\frac{k}{1-d} - h \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\gamma} (h - h' \theta) \left(\frac{k}{1-d} - h \right) + \frac{1}{2} C_Y \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \right\} \dot{d} , \end{aligned} \quad (4.47)$$

mit

$$C_Y = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{c'}{c} \theta \right) , \quad (4.48)$$

$$C_r = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{\gamma'}{\gamma} \theta \right) . \quad (4.49)$$

Die Evolutionsgleichungen von r und d sind durch (4.19) bzw. (4.35) gegeben. Ersetzt man $\dot{\hat{\mathbf{Y}}}$ in Gleichung (4.46) durch Beziehung (4.22), so führt dies zusammen mit (2.39), (2.18), (4.28), (4.13) zu

$$\begin{aligned} \dot{e}_{sY} = & \frac{(1-d)}{\rho_R} C_Y \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \cdot \left\{ \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c \hat{\mathbf{N}} - b \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) + \sqrt{6} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \hat{\mathbf{N}} \right) \dot{s} - \right. \\ & \left. - p \left\| \frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right\|^{w-1} \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (4.50)$$

Abschließend sei nochmals darauf hingewiesen, daß der Sonderfall der Thermoplastizität aus obigen Gleichungen für $p = \pi = 0$ hervorgeht.

4.3 Vereinfachte konstitutive Beziehungen

4.3.1 Vereinfachte kinematische Verfestigung

Wie bereits in Kapitel 3.3 wird die Bestimmungsgleichung für die kinematische Verfestigung durch

$$\hat{\xi} \equiv \hat{\mathbf{Z}} \quad (4.51)$$

approximiert. Die Erfüllung der Dissipationsungleichung (4.7) in hinreichender Weise erfordert, daß

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p - \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \geq 0 \quad . \quad (4.52)$$

Daraus ergibt sich nach einigen algebraischen Umformungen unter Einbeziehung der Gleichungen (4.22), (2.39), (2.18) und (4.28)

$$\left(b \dot{s} + p \left\| \frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right\|^{w-1} \right) \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) - 2 \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \cdot \hat{\mathbf{D}}_p \geq 0 \quad . \quad (4.53)$$

Unter Berücksichtigung der Definition (3.74) stellt

$$\left(b - \sqrt{6} \frac{\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}}{\|\hat{\mathbf{Z}}\|^2} \cdot \frac{\hat{\mathbf{D}}_p}{\|\hat{\mathbf{D}}_p\|} \right) \geq 0 \quad (4.54)$$

eine hinreichende Bedingung für (4.54) dar. Wegen $\|\hat{\mathbf{Z}} \hat{\mathbf{Z}}\| \leq \|\hat{\mathbf{Z}}\|^2$ muß

$$b \geq \sqrt{6} \quad (4.55)$$

gewählt werden, damit Ungleichung (4.54) stets erfüllt ist.

4.3.2 Kleine thermoelastische Verzerrungen

Unter der Voraussetzung kleiner thermoelastischer Verzerrungen läßt sich das elastische Materialverhalten durch ein lineares isotropes Stoffgesetz in ausreichender Weise beschreiben. Die Kompatibilität mit dem physikalisch linearen Hook'schen Elastizitätsgesetz gewährleistet ein Ansatz der Form (4.29) mit

$$\bar{\mathbf{H}}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}, \theta) = \mu \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} + \frac{\lambda}{2} (\text{Sp } \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et})^2 - 3 \kappa (\text{Sp } \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}) \alpha \Delta \theta_r + \frac{9}{2} \kappa (\alpha \Delta \theta_r)^2 \quad , \quad (4.56)$$

$$\bar{\mathbf{K}}(\theta) = -\frac{9}{2} \kappa (\alpha \Delta \theta_r)^2 - \rho_R \left(c_\varepsilon^* \theta \ln \frac{\theta}{\theta_r} + (C_1 - c_\varepsilon^*) \theta + C_2 \right) \quad . \quad (4.57)$$

Hier sind $\mu, \lambda, \kappa, \alpha, C_t$ temperaturabhängige Materialfunktionen, wobei

$$\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (4.58)$$

dem Kompressionsmodul, α dem Wärmeausdehnungskoeffizienten und

$$\Delta\theta_r = \theta - \theta_r \quad (4.59)$$

der Differenz zwischen absoluter Temperatur θ und einer Bezugstemperatur θ_r entspricht⁷. Weiterhin seien $c_\varepsilon^*, C_1, C_2$ konstante Größen, so daß die *spezifische Wärmekapazität* (4.38) vereinfachend

$$c_\varepsilon = \text{konst.} = c_\varepsilon^* \quad (4.60)$$

gesetzt werden kann⁸. Aufgrund der Annahme (4.56) liefert die Potentialbeziehung (4.30)

$$\hat{\mathbf{T}} = (1-d)\left\{2\mu\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} + \lambda(\text{Sp}\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}) - 3\kappa\alpha\Delta\theta_r\mathbf{1}\right\} \quad , \quad (4.61)$$

bzw. mit dem Elastizitätstensor vierter Stufe (3.31)

$$\hat{\mathbf{T}} = (1-d)\mathbf{C}[\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} - \alpha\Delta\theta_r\mathbf{1}] \quad . \quad (4.62)$$

Die Invertierung der Beziehung (4.62) legt nahe den thermoelastischen Verzerrungstensor in einen elastischen und einen thermischen Anteil aufzuspalten

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_e + \hat{\mathbf{\Gamma}}_t \quad , \quad (4.63)$$

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_e = \mathcal{M} \left[\frac{\hat{\mathbf{T}}}{1-d} \right] \quad , \quad (4.64)$$

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_t = \alpha\Delta\theta_r\mathbf{1} \quad , \quad (4.65)$$

wobei

$$\mathcal{M} = \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{2\mu}\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) = \mathcal{M}^T \quad (4.66)$$

dem reziproken Elastizitätstensor entspricht. Die Potentialeigenschaft (4.32) führt unter Einbeziehung von (4.56), (3.31) und der Zerlegung (4.63) zu

$$\Omega_{et} = -\bar{H}(\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et}, \theta) = -\frac{1}{2}\mathbf{C}[\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} - \alpha\Delta\theta_r\mathbf{1}] \cdot (\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} - \alpha\Delta\theta_r\mathbf{1}) = -\frac{1}{2}\mathbf{C}[\hat{\mathbf{\Gamma}}_e] \cdot \hat{\mathbf{\Gamma}}_e := \Omega_e \quad , \quad (4.67)$$

das wiederum mit Hilfe der Elastizitätsbeziehung (4.62) in (3.88)₃ überführt werden kann⁹.

⁷Die Funktionen (4.56) und (4.57) wurden so gewählt, daß (4.29) im Falle $d=0$ identisch ist mit dem in [45] vorgeschlagenen Ansatz.

⁸Beweis siehe Anhang (B).

⁹Somit ist auch die in Kapitel 4.1 (C) geforderte Eigenschaft $H \geq 0$ sichergestellt.

Approximation der Hyperelastizität durch Hypoelastizität

Der thermoelastische Anteil des Deformationsgradienten kann unter der Voraussetzung

$$\|\hat{\mathbf{T}}_{et}\| \ll 1 \quad (4.68)$$

durch

$$\mathbf{F}_{et} \approx \mathbf{R}_{et} \quad (4.69)$$

angenähert werden¹⁰. Letztere Beziehung zusammen mit den Gleichungen (2.27)₁, (2.26)₁, (2.13) und der Definition (4.5) haben zur Folge, daß

$$\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{F}_{et}^T \mathbf{F}_{et} \hat{\mathbf{T}} \approx \hat{\mathbf{T}} . \quad (4.70)$$

Wie schon in Kapitel 3.3.2 angedeutet, kann bei kleinen thermoelastischen Verzerrungen das Hyperelastizitätsgesetz (4.62) durch ein Hypoelastizitätsgesetz approximiert werden. Ausgehend von der materiellen Zeitableitung der Beziehungen (4.62) und (4.65) folgt mit den Oldroyd Ableitungen (2.32) und (2.39) unter Beachtung der Zerlegung (4.63)

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{T}}}{1-d} \right)^\nabla - \mathbf{c}[\hat{\mathbf{T}}_e] = \dot{\theta} \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \theta} [\hat{\mathbf{T}}_e] - \mathbf{c}[\hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\mathbf{T}}_e + \hat{\mathbf{T}}_e \hat{\mathbf{L}}_p] - \hat{\mathbf{L}}_p \mathbf{c}[\hat{\mathbf{T}}_e] - \mathbf{c}[\hat{\mathbf{T}}_e] \hat{\mathbf{L}}_p^T , \quad (4.71)$$

$$\hat{\mathbf{T}}_t - (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \dot{\theta} \mathbf{1} = \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\mathbf{T}}_t + \hat{\mathbf{T}}_t \hat{\mathbf{L}}_p . \quad (4.72)$$

Geht man zudem davon aus, daß bei kleinen thermoelastischen Verzerrungen nicht nur

$$\|\hat{\mathbf{T}}_e\| \ll 1 \quad , \quad \|\hat{\mathbf{T}}_t\| \ll 1 \quad , \quad (4.73)$$

sondern auch die rechten Seiten der Gleichungen (4.71) und (4.72) vernachlässigt werden können, so ergibt sich folgende *Hypoelastizitätsbeziehung*:

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{T}}}{1-d} \right)^\nabla = \mathbf{c}[\hat{\mathbf{T}}_e] = \mathbf{c}[\hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}}_p - \hat{\mathbf{T}}_t] \quad (4.74)$$

mit

$$\hat{\mathbf{T}}_t = (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \dot{\theta} \mathbf{1} . \quad (4.75)$$

¹⁰ \mathbf{R}_{et} stellt einen eigentlich orthogonalen Rotationstensor dar, der aus der der polaren Zerlegung $\mathbf{F}_{et} = \mathbf{R}_{et} \mathbf{U}_{et}$ hervorgeht.

Berechnung der thermoelastischen Kopplung

Ausgehend von Gleichung (4.29) erhält man unter Berücksichtigung der Beziehungen (4.67)₂, (4.63) und (4.65)

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta \partial \hat{\Gamma}_{et}} = \frac{(1-d)}{\rho_R} \left\{ \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta} [\hat{\Gamma}_e] - (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \mathcal{C}[\mathbf{1}] \right\} . \quad (4.76)$$

Aufgrund der für Gleichung (4.71) getroffenen Vereinbarungen kann der erste Term in (4.76) vernachlässigt werden, und es ergibt sich zusammen mit (3.31) und (4.58)

$$\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta \partial \hat{\Gamma}_{et}} = - \frac{(1-d)}{\rho_R} 3 \kappa (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \mathbf{1} . \quad (4.77)$$

Letzteres in (4.39) eingesetzt liefert mit (2.32) und den Zerlegungen (2.27)₃, (4.63)

$$w_{et} = - \frac{(1-d)}{\rho_R} 3 \kappa \theta (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \mathbf{1} \cdot \left(\hat{\Gamma}^{\Delta} - \hat{\Gamma}_p^{\Delta} - \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\Gamma}_e - \hat{\Gamma}_e \hat{\mathbf{L}}_p - \hat{\mathbf{L}}_p^T \hat{\Gamma}_t - \hat{\Gamma}_t \hat{\mathbf{L}}_p \right) , \quad (4.78)$$

bzw. infolge obiger Vereinbarungen für die Gleichungen (4.71) und (4.72)

$$w_{et} = - \frac{(1-d)}{\rho_R} 3 \kappa \theta (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \mathbf{1} \cdot \hat{\Gamma}^{\Delta} . \quad (4.79)$$

Berechnung der spezifischen Leistung \dot{e}_{sd}

Mit Hilfe der Annahme (4.56) kann die spezifische Leistung \dot{e}_{sd} ermittelt werden. Differentiation des Ansatzes (4.67) nach der Temperatur führt unter Einbeziehung von (4.63) und (4.65) zu

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta} [\hat{\Gamma}_e] \cdot \hat{\Gamma}_e - (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \mathcal{C}[\hat{\Gamma}_e] \cdot \mathbf{1} . \quad (4.80)$$

In Anlehnung an die vorherigen Betrachtungen wird davon ausgegangen, daß der erste Term in (4.80) einen vernachlässigbaren Beitrag liefert und es ergibt sich nach Einsetzen von (4.64)

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta} = - (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \text{Sp} \left(\frac{\hat{\mathbf{T}}}{1-d} \right) . \quad (4.81)$$

Aufgrund der Beziehungen (4.67) und (4.81) ist (4.47) somit durch

$$\begin{aligned} \dot{e}_{sd} = & - \frac{1}{\rho_R} \left\{ - \Omega_{et} + (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \text{Sp} \left(\frac{\hat{\mathbf{T}}}{1-d} \right) \theta + \frac{1}{2} C_r \left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} - h \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\gamma} (h - h' \theta) \left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} - h \right) + \frac{1}{2} C_Y \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{Z}}}{1-d} \right) \right\} \dot{d} \end{aligned} \quad (4.82)$$

bestimmt.

4.4 Zusammenfassende Darstellung

Die vereinfachten konstitutiven Beziehungen sind in Tabelle 4.1 zusammengefaßt. Dabei wurden die in der Zwischenkonfiguration $\hat{\mathbf{R}}_t$ formulierten Materialgleichungen mit Hilfe des Konzepts der dualen Variablen (siehe Anhang A.1, A.2 und A.5) in die Momentankonfiguration \mathbf{R}_t transformiert. Die Eigenschaft (4.69) bewirkt, daß die Materialgleichungen ihre Struktur beibehalten und nur die Zustandsvariablen sich ändern. Das gleiche gilt für die in Tabelle 4.2 zusammengefaßten Terme, die aus der Wärmeleitungsgleichung hervorgehen. Die Zulässigkeit der vereinfachten konstitutiven Beziehungen wurde in [53] überprüft. Vorausgreifend auf Kapitel 5 sei erwähnt, daß die Vereinfachungen bewußt zugunsten eines effektiven Integrationsalgorithmus in Kauf genommen wurden. Für die „exakte thermodynamische Formulierung“ mit dem Mandel’schen Spannungstensor $\hat{\mathbf{P}}$ und dem Translationstensor der kinematischen Verfestigung $\hat{\boldsymbol{\xi}}$ konnte bislang kein effektiver Integrationsalgorithmus gefunden werden.

Tab. 4.1: Materialmodelle der Thermoviskoplastizität (VP) und der Thermoplastizität (PL) mit Schädigung unter der Voraussetzung kleiner thermoelastischer, großer plastischer Deformationen und der Vereinfachung $\hat{\xi} = \hat{Z}$

$$\left(\frac{\mathbf{S}}{1-d}\right)^\nabla = \mathbf{c} [\dot{\mathbf{A}}_e] = \mathbf{c} [\mathbf{D} - \dot{\mathbf{A}}_p - \dot{\mathbf{A}}_t] \quad (4.83)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_t = (\alpha' \Delta\theta_r + \alpha) \dot{\theta} \mathbf{1} \quad (4.84)$$

$$F = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \left(\frac{\mathbf{S} - \mathbf{Z}}{1-d}\right)^D \right\| - \frac{k}{1-d} \quad (4.85)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_p = \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \mathbf{N} \quad , \quad \mathbf{N} = \frac{(\mathbf{S} - \mathbf{Z})^D}{\|(\mathbf{S} - \mathbf{Z})^D\|} \quad (4.86)$$

$$\left(\frac{k}{1-d}\right)^\cdot - \dot{h} = \begin{cases} \phi\left(\gamma - \beta\left(\frac{k}{1-d} - h\right)\right)\dot{s} + \frac{\gamma'}{\gamma}\dot{\theta}\left(\frac{k}{1-d} - h\right) - \pi\left(\frac{k}{1-d} - h\right)^\omega & \text{(VP)} \\ \phi\left(\gamma - \beta\left(\frac{k}{1-d} - h\right)\right)\dot{s} + \frac{\gamma'}{\gamma}\dot{\theta}\left(\frac{k}{1-d} - h\right) & \text{(PL)} \end{cases} \quad (4.87)$$

$$\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right)^\nabla = \begin{cases} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}c\mathbf{N} - b\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right)\right)\dot{s} + \frac{c'}{c}\dot{\theta}\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right) - p\left\|\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right\|^{w-1}\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right) & \text{(VP)} \\ \left(\sqrt{\frac{3}{2}}c\mathbf{N} - b\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right)\right)\dot{s} + \frac{c'}{c}\dot{\theta}\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right) & \text{(PL)} \end{cases} \quad (4.88)$$

$$\dot{d} = \left(a_0 + (a_1 + a_2 d) \frac{(-\Omega_{et})^n}{(1-d)^q}\right)\dot{s} \quad (4.89)$$

$$\Omega_{et} = -\frac{1}{(1-d)^2} \left\{ \frac{1}{4\mu} \mathbf{S}^D \cdot \mathbf{S}^D + \frac{1}{6(2\mu+3\lambda)} (\text{Sp } \mathbf{S})^2 \right\} \quad (4.90)$$

Viskoplastizität (VP) Plastizität (PL)

$$\dot{s} = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle^m}{\eta} \quad \dot{F} = 0 \Rightarrow \dot{s} \text{ für } F=0 \text{ \& } \dot{F}|_{F_p=\text{konst.}} \geq 0 \quad (4.91)$$

$$\dot{s} = 0 \text{ sonst}$$

Tab. 4.2: Wärmeleitungsgleichung, thermoelastische Kopplung, spezifische plastische Spannungsleistung und spezifische Leistung infolge der Änderung der inneren Variablen \mathbf{Y} , r , d

$$c_\varepsilon \dot{\theta} - w_{et} = r_w - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} + w_p - \dot{\varepsilon}_s \quad (4.92)$$

$$w_{et} = - \frac{(1-d)}{\rho_R} 3 \kappa \theta (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) (\operatorname{Sp} \mathbf{D}) \quad (4.93)$$

$$w_p = \frac{1}{\rho_R} \mathbf{S} \cdot \overset{\Delta}{\mathbf{A}}_p = \frac{1}{\rho_R} \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{s} \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \quad (4.94)$$

$$\dot{\varepsilon}_s = \dot{\varepsilon}_{sr} + \dot{\varepsilon}_{sY} + \dot{\varepsilon}_{sd} \quad (4.95)$$

$$\dot{\varepsilon}_{sr} = \frac{(1-d)}{\rho_R} \left\{ \frac{k}{1-d} - \frac{\gamma'}{\gamma} \left(\frac{k}{1-d} - h \right) \theta - h' \theta \right\} \dot{r} \quad (4.96)$$

$$\dot{r} = \begin{cases} \phi \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{k}{1-d} - h \right) \right) \dot{s} - \frac{\pi}{\gamma} \left(\frac{k}{1-d} - h \right)^\omega & \text{(VP)} \\ \phi \left(1 - \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{k}{1-d} - h \right) \right) \dot{s} & \text{(PL)} \end{cases} \quad (4.97)$$

$$\dot{\varepsilon}_{sY} = \frac{(1-d)}{\rho_R} \left(1 - \frac{c'}{c} \theta \right) \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) \cdot \dot{\mathbf{Y}} \quad (4.98)$$

$$\dot{\mathbf{Y}} = \begin{cases} \frac{1}{c} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c \mathbf{N} - b \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) + \sqrt{6} \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) \mathbf{N} \right) \dot{s} - \frac{p}{c} \left\| \frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right\|^{w-1} \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) & \text{(VP)} \\ \frac{1}{c} \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c \mathbf{N} - b \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) + \sqrt{6} \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) \mathbf{N} \right) \dot{s} & \text{(PL)} \end{cases} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{sd} = & - \frac{1}{\rho_R} \left\{ - \Omega_{et} + (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \operatorname{Sp} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right) \theta + \frac{1}{2\gamma} \left(1 - \frac{\gamma'}{\gamma} \theta \right) \left(\frac{k}{1-d} - h \right)^2 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\gamma} (h - h' \theta) \left(\frac{k}{1-d} - h \right) + \frac{1}{2c} \left(1 - \frac{c'}{c} \theta \right) \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) \right\} \dot{d} \end{aligned} \quad (4.100)$$

5 Spannungsalgorithmus bei gekoppelten thermomechanischen Problemen

In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise bei der Integration des in Tabelle 4.1 zusammengefaßten Materialmodells der Thermo(visko)plastizität mit Schädigung beschrieben. Der Integrationsalgorithmus ist speziell auf das Finite Elemente Programm ABAQUS zugeschnitten und basiert auf dem HUGHES-WINGET-Verfahren [44]. In Anlehnung an [45] wird ein dreifacher Operator-Split eingeführt, bestehend aus einem thermoelastischen Anteil, einem inelastischen Anteil und einem Anteil, der die statischen Erholungsterme beinhaltet. Die Schädigung wird hierbei im inelastischen Anteil berücksichtigt. Die Integration der konstitutiven Gleichungen erfolgt in Operator I mit der Mittelpunktsregel, in der Operatoren II und III mit einem impliziten Euler-Verfahren. Insbesondere lassen sich so im Falle der Viskoplastizität die Anzahl der mit dem Newton-Verfahren zu lösenden Gleichungen in den Operatoren II und III erheblich reduzieren. Ferner wird im Laufe dieses Kapitels auf die Berechnung der von ABAQUS geforderten Beiträge zur Tangentensteifigkeitsmatrix eingegangen.

5.1 Finite Elemente Formulierung

5.1.1 Variationsprinzipien – schwache Form der Feldgleichungen

Die Methode der finiten Elemente basiert auf Variationsverfahren, denen Arbeits- und Energieprinzipien zugrunde liegen. Bei thermomechanischen Problemen sind dies das *Prinzip der virtuellen Verschiebungen* und das *Prinzip der virtuellen Temperatur*. Die Herleitung dieser Prinzipien geht von der Impulsbilanz bzw. von der Wärmeleitungsgleichung in lokaler Form

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{f} = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad , \quad (5.1)$$

$$c_\epsilon \dot{\theta} = r_w + w_{et} + w_p - \dot{e}_s - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (5.2)$$

aus, wobei \mathbf{f} einer spezifischen Volumenkraft entspricht. Die Oberfläche ∂R_t des materiellen Körpers in der Momentankonfiguration, mit der nach außen gerichteten Einheitsnormalen \mathbf{n} , wird in Teilflächen ∂R_t^u , ∂R_t^σ , ∂R_t^θ , ∂R_t^q mit

$$\partial R_t^u \cup \partial R_t^\sigma = \partial R_t \quad \wedge \quad \partial R_t^u \cap \partial R_t^\sigma = \emptyset \quad , \quad (5.3)$$

$$\partial R_t^\theta \cup \partial R_t^q = \partial R_t \quad \wedge \quad \partial R_t^\theta \cap \partial R_t^q = \emptyset \quad (5.4)$$

zerlegt, bzgl. derer die Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R(\mathbf{x}, t) \quad \text{auf } \partial R_t^u \quad , \quad (5.5)$$

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \mathbf{t}_R(\mathbf{x}, t) \quad \text{auf } \partial R_t^\sigma \quad , \quad (5.6)$$

sowie die Temperatur- und Wärmeflußrandbedingungen

$$\theta = \theta_R(\mathbf{x}, t) \quad \text{auf } \partial R_t^\theta \quad , \quad (5.7)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = q_R(\mathbf{x}, t) \quad \text{auf } \partial R_t^q \quad (5.8)$$

gelten. Der über die freie Oberfläche ∂R_t^q übertragene Wärmestrom q_R kann entweder von außen aufgeprägt werden oder durch Konvektion bzw. Strahlung hervorgerufen werden. Die Feldgleichungen (5.1), (5.2) zusammen mit den Randbedingungen (5.5) – (5.8) und entsprechenden Anfangsbedingungen für $\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}$ und θ legen das zu lösende *Anfangsrandwertproblem* fest.

Die Überführung dieses Anfangsrandwertproblems in eine *Variationsformulierung*, auch *schwache Formulierung* genannt, geschieht durch integrale Mittelwertbildung. Hierzu wird zunächst die Impulsbilanz (5.1) skalar mit einer vektorwertigen Testfunktion $\boldsymbol{\chi}$ multipliziert und über das Volumen des betrachteten Körpers integriert. Dasselbe erfolgt mit der Wärmebilanzgleichung (5.2), die mit einer skalarwertigen Testfunktion χ gewichtet wird. Dies führt zu

$$\int_{R_t} \boldsymbol{\chi} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} \, dv + \int_{R_t} \rho \boldsymbol{\chi} \cdot (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{x}}) \, dv = 0 \quad , \quad (5.9)$$

$$\int_{R_t} \chi \operatorname{div} \mathbf{q} \, dv + \int_{R_t} \rho \chi (c_\varepsilon \dot{\theta} - r_w - w_{et} - w_p + \dot{e}_s) \, dv = 0 \quad . \quad (5.10)$$

Die Testfunktionen haben den Charakter von Gewichtsfunktionen, wobei $\boldsymbol{\chi}$ als virtuelle Verschiebung und χ als virtuelle Temperatur aufzufassen sind. Der virtuelle Zustand muß den wesentlichen Randbedingungen auf den Randabschnitten ∂R_t^u und ∂R_t^θ genügen, d.h.

$$\boldsymbol{\chi}_R = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial R_t^u \quad , \quad (5.11)$$

$$\chi_R = 0 \quad \text{auf } \partial R_t^\theta \quad . \quad (5.12)$$

Anwenden der Produktregel auf den ersten Term in (5.9) und (5.10) liefert unter Berücksichtigung des Gaußschen Integralsatzes

$$\int_{R_t} \mathbf{T} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\chi} \, dv - \int_{R_t} \rho \boldsymbol{\chi} \cdot (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{x}}) \, dv - \int_{\partial R_t} \mathbf{T} \boldsymbol{\chi}_R \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad , \quad (5.13)$$

$$\int_{R_t} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \chi \, dv - \int_{R_t} \rho \chi (c_\varepsilon \dot{\theta} - r_w - w_{et} - w_p + \dot{e}_s) \, dv - \int_{\partial R_t} \chi_R \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad , \quad (5.14)$$

oder mit den Forderungen (5.11) und (5.12) nach Einarbeiten der Spannungsrandbedingung (5.6) und der Wärmeflußrandbedingung (5.8)

$$\mathcal{G}(\mathbf{u}, \theta, \boldsymbol{\chi}) = \int_{R_t} \mathbf{T} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\chi} \, dv - \int_{R_t} \rho \boldsymbol{\chi} \cdot (\mathbf{f} - \ddot{\mathbf{x}}) \, dv - \int_{\partial R_t^\sigma} \mathbf{t}_R \cdot \boldsymbol{\chi}_R \, da = 0 \quad , \quad (5.15)$$

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, \theta, \chi) = \int_{R_t} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \chi \, dv - \int_{R_t} \rho \chi (c_\varepsilon \dot{\theta} - r_w - w_{et} - w_p + \dot{e}_s) \, dv - \int_{\partial R_t^q} \chi_R q_R \, da = 0 \quad . \quad (5.16)$$

Der Spannungstensor \mathbf{T} sowie die thermomechanischen Größen w_{et}, w_p und \dot{e}_s gehen aus der Materialroutine hervor, während \mathbf{q} dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz (4.9) unterliegt. Die durch (5.15) und (5.16) gegebene schwache Formulierung erfüllt die Feldgleichungen (5.1), (5.2) und die natürlichen Randbedingungen (5.6), (5.8) nicht mehr exakt, sondern nur noch im integralen Mittel¹.

Es sei angemerkt, daß die Methode der finiten Elemente auf einer räumlich diskretisierten Form dieser beiden Gleichungen basiert. Hierzu werden die unbekanntenen Zustandsgrößen (Verschiebung und Temperatur) durch Ansatzfunktionen approximiert, die die wesentlichen Randbedingungen (5.5) und (5.7) erfüllen müssen. Sei n die Anzahl aller Verschiebungs- und m die Anzahl aller Temperaturfreiheitsgrade des FE-Modells, so kann (5.15) und (5.16) als ein System von $(n+m)$ nichtlinearen Gleichungen dargestellt werden (siehe hierzu [40] (Kapitel 3.1.1, Kapitel 6.1.1)).

¹Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *Methode der gewichteten Residuen* [102, S.49 ff], d.h. es werden Näherungslösungen gesucht, so daß die ‚Residuen‘ im Integralmittel verschwinden.

5.1.2 Allgemeine Problemstellung

Das grundlegende Problem bei einer nichtlinearen Finite Elemente Berechnung besteht darin zu einer gegebenen Belastung die entsprechende Gleichgewichtslage eines Körpers zu ermitteln, so daß die schwache Form der Impulsbilanz (5.15) und die schwache Form der Wärmeleitungsgleichung (5.16), genauer gesagt deren räumlich diskretisierte Form, befriedigt wird². Dies erfordert in der Regel eine inkrementelle Vorgehensweise.

Betrachtet werde die Bewegung eines materiellen Körpers \mathcal{B} bzgl. eines raumfesten, kartesischen Koordinatensystems mit Ursprung O (siehe Abbildung 5.1). Ausgehend von der Ausgangskonfiguration zum Zeitpunkt t_i werden sukzessive Gleichgewichtslagen von \mathcal{B} an diskreten Zeitstützstellen $t_1, t_2, \dots, t, t + \Delta t, \dots$ bestimmt. Im folgenden wird davon ausgegangen, daß alle Gleichgewichtslagen bis einschließlich zum Zeitpunkt t bekannt seien. Das Problem besteht nun darin für ein gegebenes Zeitinkrement Δt die zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ gehörende Gleichgewichtslage zu ermitteln. In anderen Worten ausgedrückt, handelt es sich hierbei um ein sogenanntes *dehnungsgesteuertes Zweipunktproblem*, das es zu lösen gilt.

Die von \mathcal{B} zu den Zeitpunkten t_i, t und $t + \Delta t$ eingenommenen Raumbereiche seien R_i, R_t und $R_{t+\Delta t}$. Insbesondere werden Variablen, die sich auf den Zeitpunkt t beziehen durch einen tiefgestellten Index 0 gekennzeichnet, während Größen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ den Index 1 besitzen. Entsprechend dieser Konvention seien $\mathbf{X}_i, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1$ die Ortsvektoren eines materiellen Punktes X zu den Zeitpunkten $t_i, t, t + \Delta t$. Der Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt t ist durch den Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{X}_i, t) = \mathbf{x}_0 - \mathbf{X}_i$ und das Temperaturfeld $\theta_0 = \theta(\mathbf{X}_i, t)$ eindeutig bestimmt. Der inkrementelle Verschiebungsvektor $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ und das inkrementelle Temperaturfeld $\Delta \theta = \theta_1 - \theta_0$ legen den gesuchten Gleichgewichtszustand zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ fest. Die gestrichelten Konfigurationen in Abbildung 5.1 kennzeichnen Nichtgleichgewichtszustände während der Iteration. Weiterhin bezeichnen $\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \Delta \mathbf{F}$ die Deformationsgradienten, die zwischen den Tangentialvektorräumen von Punkten in R_i und R_t , R_i und $R_{t+\Delta t}$ sowie R_t und $R_{t+\Delta t}$ operieren, wobei gilt $\mathbf{F}_1 = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}_0$. Da als Referenzkonfiguration die Konfiguration zum Zeitpunkt t gewählt wurde, liegt eine sogenannte *updated Lagrange* Formulierung [3, S.335 f] vor, d.h. die Referenzkonfiguration wird nach jedem Zeitschritt aktualisiert³.

²Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der Begriff Gleichgewichtslage hier nicht im Sinne der Statik aufzufassen ist, sondern einen Zustand beschreibt, bei dem alle Zustandsvariablen bekannt und Impuls- und Energiebilanz erfüllt sind.

³Im Gegensatz zur *total Lagrange* Formulierung, deren Referenzkonfiguration die Ausgangskonfiguration zum Zeitpunkt t_i ist.

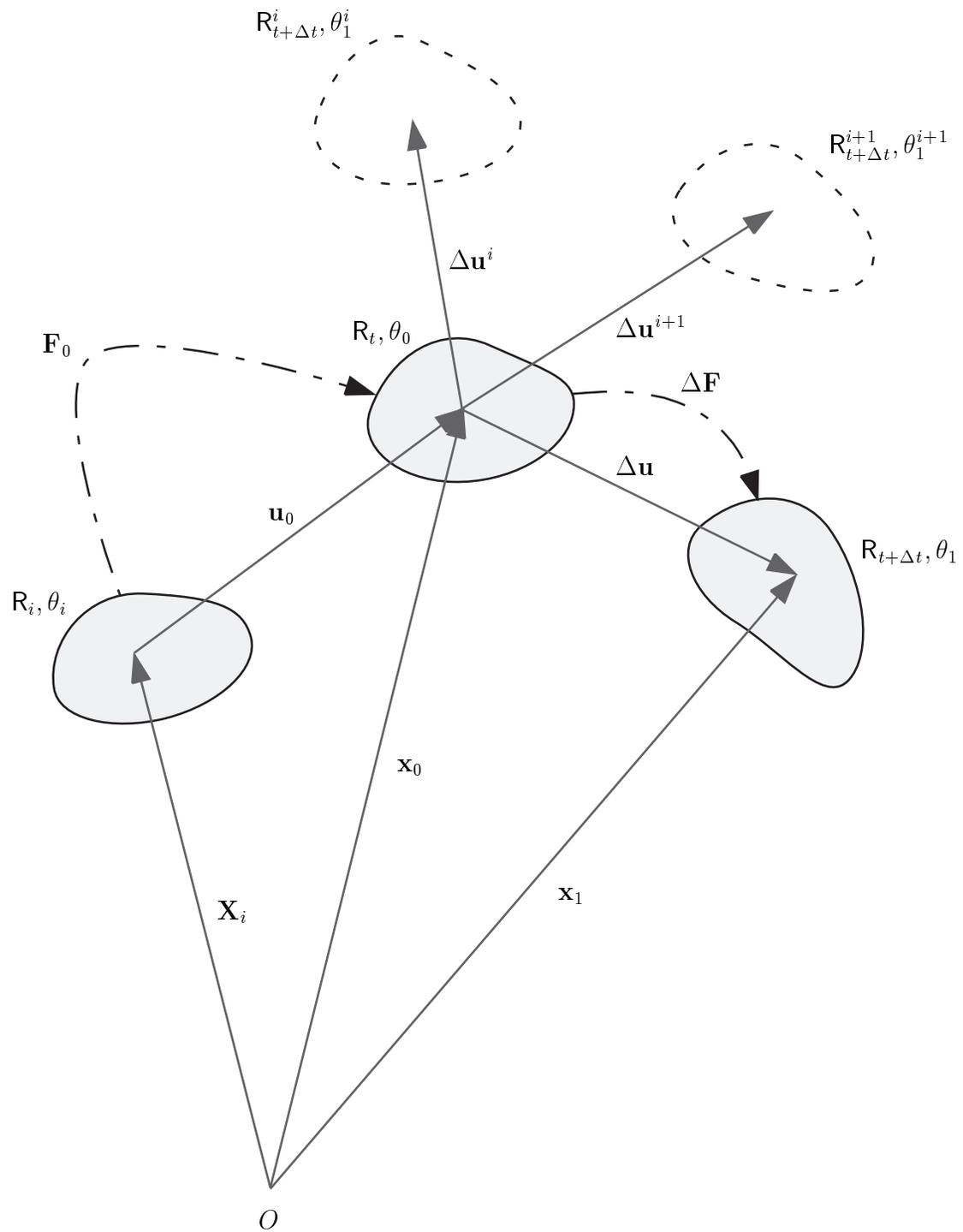


Abb. 5.1: Bewegung eines Körpers bzgl. eines raumfesten, kartesischen Koordinatensystems.

5.1.3 Gleichgewichtsiteration

Ein Körper befindet sich in einem Gleichgewichtszustand, wenn die Feldgleichungen (5.15) und (5.16) erfüllt sind. In der Regel handelt es sich hierbei um ein nichtlineares Gleichungssystem der Form

$$\mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}, \Delta \theta, \boldsymbol{\chi}) = 0 \quad (5.17)$$

$$\mathcal{L}^*(\Delta \mathbf{u}, \Delta \theta, \boldsymbol{\chi}) = 0 \quad , \quad (5.18)$$

das iterativ gelöst werden muß⁴. Ein in der Praxis weit verbreitetes Iterationsverfahren zur Lösung derartiger Nullstellenprobleme ist das *Newton-Verfahren*, das auch von ABAQUS verwendet wird. Im Gegensatz zu anderen numerischen Verfahren, wie Modified Newton oder Quasi-Newton-Verfahren, zeichnet sich der Newton-Algorithmus durch eine quadratische Konvergenzrate aus.

Die grundlegende Vorgehensweise beim Newton-Verfahren ist die folgende:

Nach dem i -ten Iterationsschritt liege eine Näherungslösung $\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i$ der Gleichungen (5.17) und (5.18) vor. Lösen des linearen Gleichungssystems

$$- \begin{pmatrix} \mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \boldsymbol{\chi}) \\ \mathcal{L}^*(\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i, \boldsymbol{\chi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{G}^*}{\partial \Delta \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathcal{G}^*}{\partial \Delta \theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \Delta \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \Delta \theta} \end{pmatrix}_{\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \theta^i} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{i+1} - \Delta \mathbf{u}^i \\ \Delta \theta^{i+1} - \Delta \theta^i \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

liefert eine verbesserte Näherungslösung $\Delta \mathbf{u}^{i+1}, \Delta \theta^{i+1}$.

Die Iteration wird solange fortgesetzt bis die Abbruchkriterien

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}^{i+1}, \Delta \theta^{i+1}, \boldsymbol{\chi}) \\ \mathcal{L}^*(\Delta \mathbf{u}^{i+1}, \Delta \theta^{i+1}, \boldsymbol{\chi}) \end{pmatrix} \right\| \leq \varepsilon \quad , \quad \left\| \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u}^{i+1} - \Delta \mathbf{u}^i \\ \Delta \theta^{i+1} - \Delta \theta^i \end{pmatrix} \right\| \leq \epsilon \quad , \quad \epsilon > 0 \quad (5.20)$$

erfüllt sind.

Die in (5.19) auftretende Funktionalmatrix, auch *Jacobi-Matrix* oder *Tangentensteifigkeitsmatrix* genannt, läßt sich aus dem totalen Differential der Gleichungen (5.15) und (5.16)

$$d\mathcal{G}^* = d\mathcal{G}_a^* + d\mathcal{G}_b^* \quad , \quad (5.21)$$

$$d\mathcal{G}_a^* = d \left(\int_{R_{t+\Delta t}} \mathbf{T} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\chi} \, dv \right) = d \left(\int_{R_t} \mathbf{S} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\chi} \, dV \right) \quad , \quad (5.22)$$

⁴Es gilt: $\mathcal{G}(\mathbf{u}_1, \theta_1, \boldsymbol{\chi}) = \mathcal{G}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \theta_0 + \Delta \theta, \boldsymbol{\chi}) = \mathcal{G}^*(\Delta \mathbf{u}, \Delta \theta, \boldsymbol{\chi}) = 0$,
 $\mathcal{L}(\mathbf{u}_1, \theta_1, \boldsymbol{\chi}) = \mathcal{L}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \theta_0 + \Delta \theta, \boldsymbol{\chi}) = \mathcal{L}^*(\Delta \mathbf{u}, \Delta \theta, \boldsymbol{\chi}) = 0$.

$$d\mathcal{G}_b^* = -d\left(\int_{R_{t+\Delta t}} \rho \boldsymbol{\chi} \cdot (\mathbf{f} - \dot{\mathbf{x}}) dv + \int_{\partial R_{t+\Delta t}^\sigma} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\chi}_R da\right), \quad (5.23)$$

$$d\mathcal{L}^* = d\mathcal{L}_a^* + d\mathcal{L}_b^*, \quad (5.24)$$

$$d\mathcal{L}_a^* = d\left(\int_{R_{t+\Delta t}} \rho \chi (w_{et} + w_p - \dot{e}_s) dv\right) = \int_{R_t} \rho_R \chi (dw_{et} + dw_p - d\dot{e}_s) dV, \quad (5.25)$$

$$d\mathcal{L}_b^* = d\left(\int_{R_{t+\Delta t}} \mathbf{q} \cdot \text{grad } \chi dv - \int_{R_{t+\Delta t}} \rho \chi (c_\varepsilon \dot{\theta} - \mathbf{r}_w) dv - \int_{\partial R_{t+\Delta t}^q} \chi_R q_R da\right) \quad (5.26)$$

ableiten. Der Term $d\mathcal{G}_a^*$ kann mit Hilfe der Beziehungen

$$d(\text{grad } \boldsymbol{\chi}) = d(\text{GRAD } \boldsymbol{\chi} \mathbf{F}^{-1}) = \text{GRAD } \boldsymbol{\chi} d\mathbf{F}^{-1}, \quad (5.27)$$

$$d\mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \quad (5.28)$$

in

$$d\mathcal{G}_a^* = \int_{R_t} d\mathbf{S} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\chi} dV - \int_{R_t} \mathbf{S} \cdot \text{GRAD } \boldsymbol{\chi} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} dV, \quad (5.29)$$

überführt werden.

Sowohl der erste Term in (5.29) als auch Gleichung (5.25)₂ hängt von den in der Materialroutine zugrunde gelegten konstitutiven Beziehungen ab und muß deshalb individuell vom Benutzer bereitgestellt werden. Wie die von ABAQUS geforderten Beiträge zur Tangentensteifigkeitsmatrix im einzelnen auszusehen haben, wird in Kapitel 5.2.6 näher erläutert. Alle anderen Terme, insbesondere die Größen $d\mathcal{G}_b^*$ und $d\mathcal{L}_b^*$, werden von ABAQUS intern berechnet und sollen hier nicht weiter betrachtet werden⁵.

⁵Der Leser sei in diesem Zusammenhang auf die Kapitel 3.1.1 und 6.1.1 in [40] verwiesen.

5.2 Integrationsalgorithmus

In diesem Kapitel wird ein auf das Finite Elemente Programm ABAQUS abgestimmter Integrationsalgorithmus für das in Tabelle 4.1 vorliegende System von konstitutiven Gleichungen vorgestellt. ABAQUS bietet die Möglichkeit über die Benutzerschnittstelle UMAT, eigene Materialmodelle zu implementieren. Hierbei wird nahegelegt, zur Integration der Materialgleichungen den HUGHES-WINGET-Algorithmus [44] zu verwenden.

In Anlehnung an WEBER [101] wird zunächst eine *bar-Transformation* eingeführt. In diesem Zusammenhang beschreibe der Ortsvektor $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \zeta)$ die Lage eines materiellen Punktes zum Zeitpunkt $\zeta \in [t, t + \Delta t]$, wobei für festgehaltenes ζ eine Inverse $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}_0(\mathbf{x}, \zeta)$ existiert. Die Notation in 5.1.2 beibehaltend gilt $\mathbf{x}_0 = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, t)$ bzw. $\mathbf{x}_1 = \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, t + \Delta t)$. Der Deformationsgradient, der Geschwindigkeitsvektor und der Geschwindigkeitsgradient lassen sich im betrachteten Zeitintervall somit wie folgt darstellen:

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \zeta) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \zeta)}{\partial \mathbf{x}_0} , \quad (5.30)$$

$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0, \zeta) = \frac{d}{d\zeta} \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \zeta) , \quad (5.31)$$

$$\mathbf{L} = \tilde{\mathbf{L}}(\mathbf{x}_0, \zeta) = \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_0, \zeta)}{\partial \mathbf{x}} = \left(\frac{d}{d\zeta} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \zeta) \right) \left(\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, \zeta) \right)^{-1} , \quad (5.32)$$

mit $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{1}$ und $\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, t + \Delta t) = \Delta \mathbf{F}$. Für festgehaltenes \mathbf{x}_0 sei

$$\overline{\mathbf{A}}(\zeta) = \mathbf{Q}^T(\zeta) \mathbf{A}(\zeta) \mathbf{Q}(\zeta) \quad (5.33)$$

die *bar-Transformierte* eines symmetrischen Euler'schen Tensorfeldes \mathbf{A} , wobei der Rotationstensor \mathbf{Q} durch die Lösung des Anfangswertproblems

$$\frac{d}{d\zeta} \mathbf{Q}(\zeta) = \mathbf{W}(\zeta) \mathbf{Q}(\zeta) , \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{1} \quad (5.34)$$

bestimmt ist. Der Wirbeltensor \mathbf{W} geht aus (2.12) hervor. Differentiation der Beziehung (5.33) liefert folgenden Zusammenhang zwischen der materiellen Zeitableitung von $\overline{\mathbf{A}}$ und der *Jaumann-Ableitung* von \mathbf{A} :

$$\frac{d}{d\zeta} \overline{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^T \left(\frac{d}{d\zeta} \mathbf{A} - \mathbf{W}\mathbf{A} + \mathbf{A}\mathbf{W} \right) \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T \overset{\circ}{\mathbf{A}} \mathbf{Q} . \quad (5.35)$$

Das in Tabelle 4.1 zusammengefaßte System der konstitutiven Gleichungen wird mit Hilfe eines *Operator-Split-Verfahrens* integriert. In Analogie zu JANSOHN [45] wird ein dreifacher Operator-Split eingeführt, worin Operator I die rein thermoelastischen Anteile, Operator II die inelastischen Anteile einschließlich Schädigung und Operator III die statischen Erholungsterme beinhaltet. Bei Plastizität entfällt Operator III.

Der hier vorliegende Fall geht von einem Anfangswertproblem der Form

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right) = \frac{d}{d\zeta} {}^I \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right) + \frac{d}{d\zeta} {}^{II} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right) + \frac{d}{d\zeta} {}^{III} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right) , \quad (5.36)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) = \frac{d}{d\zeta} {}^I \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) + \frac{d}{d\zeta} {}^{II} \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) + \frac{d}{d\zeta} {}^{III} \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) , \quad (5.37)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right) = \frac{d}{d\zeta} {}^I \left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right) + \frac{d}{d\zeta} {}^{II} \left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right) + \frac{d}{d\zeta} {}^{III} \left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right) , \quad (5.38)$$

$$\frac{d d}{d\zeta} = \frac{d {}^I d}{d\zeta} + \frac{d {}^{II} d}{d\zeta} + \frac{d {}^{III} d}{d\zeta} , \quad (5.39)$$

$$\frac{d s}{d\zeta} = \frac{d {}^I s}{d\zeta} + \frac{d {}^{II} s}{d\zeta} + \frac{d {}^{III} s}{d\zeta} , \quad (5.40)$$

mit den Anfangswerten

$${}^I \mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_0 , \quad {}^I \mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_0 , \quad {}^I \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_0 , \quad {}^I d_0 = d_0 , \quad {}^I s_0 = s_0 \quad (5.41)$$

aus, das als Summe dreier nichtlinearer Operatoren geschrieben wird⁶. Hierzu werden zunächst die Gleichungen (4.83) und (4.88) mittels der Beziehung (2.40) in gewöhnliche Differentialgleichungen überführt.

Der *thermoelastische Anteil* (Operator I) ist durch das Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{d\zeta} {}^I \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right) = \mathbf{L} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right) + \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right) \mathbf{L}^T + \mathbf{c} [\mathbf{D} - (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \frac{d\theta}{d\zeta} \mathbf{1}] , \quad (5.42)$$

$$\frac{d}{d\zeta} {}^I \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) = \mathbf{L} \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) + \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) \mathbf{L}^T + \frac{c'}{c} \frac{d\theta}{d\zeta} {}^I \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) , \quad (5.43)$$

⁶Prinzipiell ist eine beliebige additive Zerlegung des Gleichungssystems möglich, insofern sie physikalisch sinnvoll ist. SIMO & JU [84] bzw. JU [46] führen für den elastoplastischen Fall mit Schädigung ebenfalls einen dreifachen Operator-Split ein, allerdings unterscheiden sie zwischen einem elastischen, einem plastischen und einem Schädigungsanteil.

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right) = \left\{ h' + \frac{\gamma'}{\gamma} \left(\left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right) - h \right) \right\} \frac{d\theta}{d\zeta} , \quad (5.44)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \mathbf{d} = 0 , \quad (5.45)$$

$$\frac{d}{d\zeta} s = 0 \quad (5.46)$$

festgelegt, dessen Lösungen als Anfangswerte für den inelastischen Anteil dienen.

Der *inelastische Anteil* (Operator II) ist durch das folgende Differentialgleichungssystem definiert:

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right) = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{d}{d\zeta} s \mathbf{c} [{}^{II}\mathbf{N}] , \quad (5.47)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} c {}^{II}\mathbf{N} - b \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) \right) \frac{d}{d\zeta} s , \quad (5.48)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right) = \phi \left(\gamma - \beta \left(\left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right) - h \right) \right) \frac{d}{d\zeta} s , \quad (5.49)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \mathbf{d} = \left(a_0 + (a_1 + a_2 {}^{II}\mathbf{d}) \frac{(-\Omega_{et})^n}{(1-{}^{II}\mathbf{d})^q} \right) \frac{d}{d\zeta} s , \quad (5.50)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{d\zeta} = 0 &\Rightarrow \frac{d}{d\zeta} s \text{ für } F=0 \text{ \& } \left. \frac{dF}{d\zeta} \right|_{\mathbf{F}_p=\text{konst.}} \geq 0 \\ \frac{d}{d\zeta} s &= 0 \text{ sonst} \end{aligned} \right\} \quad (\text{PL}) , \quad (5.51)$$

$$\frac{d}{d\zeta} s = \frac{\langle \mathbf{F} \rangle^m}{\eta} \quad (\text{VP}) . \quad (5.52)$$

Bei Plastizität sind die Lösungen dieses Differentialgleichungssystems identisch mit den gesuchten Lösungen des Anfangswertproblems, während sie bei Viskoplastizität als Anfangswerte für den statischen Erholungsterm benutzt werden.

Operator III beinhaltet die *statischen Erholungsterme* und spielt deshalb nur im Falle der Viskoplastizität eine Rolle. Die gesuchten Lösungen des Anfangswertproblems gehen somit aus dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right) = \mathbf{0} \quad , \quad (5.53)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) = -p \left\| \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) \right\|^{w-1} \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right) \quad , \quad (5.54)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right) = -\pi \left(\left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right) - h \right)^\omega \quad , \quad (5.55)$$

$$\frac{d}{d\zeta} d = 0 \quad , \quad (5.56)$$

$$\frac{d}{d\zeta} s = 0 \quad (5.57)$$

hervor.

5.2.1 Integration des thermoelastischen Anteils

Die Integration des thermoelastischen Anteils erfolgt mit dem HUGHES-WINGET-Algorithmus [44]. Dieser geht davon aus, daß die tensoriellen Evolutionsgleichungen mit Jaumann-Ableitungen formuliert werden. Infolgedessen werden die Gleichungen (5.42) und (5.43) mit Hilfe der Beziehungen (2.10), (2.12) zunächst so umgeschrieben, daß auf der linken Seite die entsprechenden Jaumann-Ableitungen stehen. Da ${}^I d = d_0 = konst.$ folgt

$$\frac{d}{d\zeta} {}^I \mathbf{S} - \mathbf{W} {}^I \mathbf{S} + {}^I \mathbf{S} \mathbf{W} = \mathbf{D} {}^I \mathbf{S} + {}^I \mathbf{S} \mathbf{D} + (1-d_0) \mathbf{C} [\mathbf{D} - (\alpha' \Delta\theta_r + \alpha) \frac{d\theta}{d\zeta} \mathbf{1}] \quad , \quad (5.58)$$

$$\frac{d}{d\zeta} {}^I \mathbf{Z} - \mathbf{W} {}^I \mathbf{Z} + {}^I \mathbf{Z} \mathbf{W} = \mathbf{D} {}^I \mathbf{Z} + {}^I \mathbf{Z} \mathbf{D} + \frac{c'}{c} \frac{d\theta}{d\zeta} {}^I \mathbf{Z} \quad , \quad (5.59)$$

oder nach Rückrotation in die Konfiguration \mathbf{R}_t mittels (5.33) und (5.35)

$$\frac{d}{d\zeta} \bar{\mathbf{S}} = \bar{\mathbf{D}} {}^I \bar{\mathbf{S}} + {}^I \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{D}} + (1-d_0) \mathbf{C} [\bar{\mathbf{D}} - (\alpha' \Delta\theta_r + \alpha) \frac{d\theta}{d\zeta} \mathbf{1}] \quad , \quad (5.60)$$

$$\frac{d}{d\zeta} \bar{\mathbf{Z}} = \bar{\mathbf{D}} {}^I \bar{\mathbf{Z}} + {}^I \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{D}} + \frac{c'}{c} \frac{d\theta}{d\zeta} {}^I \bar{\mathbf{Z}} \quad . \quad (5.61)$$

Die bar-transformierten Gleichungen besitzen die Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die zusammen mit der verbleibenden Evolutionsgleichung (5.44)

$$\frac{d}{d\zeta} {}^I \mathbf{k} = \left(\frac{\gamma'}{\gamma} {}^I \mathbf{k} + (1-d_0) \left(h' - \frac{\gamma'}{\gamma} h \right) \right) \frac{d\theta}{d\zeta} \quad (5.62)$$

mit einem stabilen impliziten Euler-Verfahren integriert werden können. Anwenden der Mittelpunktsregel mit den Anfangsbedingungen

$${}^I\bar{\mathbf{S}}_0 = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{S}_0 \mathbf{Q}_0 = \mathbf{S}_0 \quad , \quad {}^I\bar{\mathbf{Z}}_0 = \mathbf{Q}_0^T \mathbf{Z}_0 \mathbf{Q}_0 = \mathbf{Z}_0 \quad , \quad {}^I\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_0 \quad , \quad (5.63)$$

die aus (5.33) und (5.34)₂ hervorgehen, führt unter der Voraussetzung einer konstanten Temperaturgeschwindigkeit

$$\frac{d\theta}{d\zeta} = \frac{\theta_1 - \theta_0}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (5.64)$$

zu

$${}^I\bar{\mathbf{S}}_1 = \mathbf{S}_0 + \Delta t \left(\bar{\mathbf{D}}_{1/2} {}^I\bar{\mathbf{S}}_{1/2} + {}^I\bar{\mathbf{S}}_{1/2} \bar{\mathbf{D}}_{1/2} + (1-d_0) \mathbf{c}_{1/2} \left[\bar{\mathbf{D}}_{1/2} - C_{\alpha_{1/2}} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \mathbf{1} \right] \right) \quad , \quad (5.65)$$

$${}^I\bar{\mathbf{Z}}_1 = \mathbf{Z}_0 + \Delta t \left(\bar{\mathbf{D}}_{1/2} {}^I\bar{\mathbf{Z}}_{1/2} + {}^I\bar{\mathbf{Z}}_{1/2} \bar{\mathbf{D}}_{1/2} \right) + 2 C_{Z_{1/2}} \Delta\theta {}^I\bar{\mathbf{Z}}_{1/2} \quad , \quad (5.66)$$

$${}^I\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_0 + \left\{ 2 C_{K_{1/2}} {}^I\mathbf{k}_{1/2} + (1-d_0) \left(h'_{1/2} - 2 C_{K_{1/2}} h_{1/2} \right) \right\} \Delta\theta \quad , \quad (5.67)$$

mit

$$C_{\alpha_{1/2}} = \alpha'_{1/2} \Delta\theta_{r_{1/2}} + \alpha_{1/2} \quad , \quad (5.68)$$

$$C_{Z_{1/2}} = \frac{c'_{1/2}}{2 c_{1/2}} \quad , \quad (5.69)$$

$$C_{K_{1/2}} = \frac{\gamma'_{1/2}}{2 \gamma_{1/2}} \quad . \quad (5.70)$$

Der tiefgestellte Index 1/2 kennzeichnet Größen zum Zeitpunkt $t + \Delta t/2$, wobei gilt:

$${}^I\bar{\mathbf{S}}_{1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{S}_0 + {}^I\bar{\mathbf{S}}_1) \quad , \quad {}^I\bar{\mathbf{Z}}_{1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{Z}_0 + {}^I\bar{\mathbf{Z}}_1) \quad , \quad {}^I\mathbf{k}_{1/2} = \frac{1}{2} ({}^I\mathbf{k}_0 + {}^I\mathbf{k}_1) \quad . \quad (5.71)$$

Eine weitere charakteristische Eigenschaft des HUGHES-WINGET-Algorithmus ist die Annahme eines konstanten Verzerrungsgeschwindigkeitstensors $\bar{\mathbf{D}}(\zeta)$ im betrachteten Zeitintervall $\zeta \in [t, t + \Delta t]$, mit dessen Hilfe ein Verzerrungsinkrement

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} := \Delta t \bar{\mathbf{D}} \quad (5.72)$$

definiert wird.

Durch anschließende Vorwärtsrotation der bar-transformierten Zustandsvariablen in die Konfiguration $\mathbf{R}_{t+\Delta t}$ erhält man die gesuchten Lösungen des Anfangswertproblems I. - Gemäß den

Abbildungsvorschriften ${}^I\mathbf{S}_1 = \mathbf{Q}_1 {}^I\bar{\mathbf{S}}_1 \mathbf{Q}_1^T$ und ${}^I\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Q}_1 {}^I\bar{\mathbf{Z}}_1 \mathbf{Q}_1^T$ ergeben sich unter Berücksichtigung der Beziehungen (5.71)₁ und (5.71)₂

$${}^I\mathbf{S}_1 - \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} {}^I\mathbf{S}_1 + {}^I\mathbf{S}_1 \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) =$$

$$\mathbf{S}_0^* + \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{S}_0^* + \mathbf{S}_0^* \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) + (1-d_0) \mathbf{C}_{1/2} [\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - C_{\alpha_{1/2}} \Delta\theta \mathbf{1}] , \quad (5.73)$$

$$(1 - C_{Z_{1/2}} \Delta\theta) {}^I\mathbf{Z}_1 - \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} {}^I\mathbf{Z}_1 + {}^I\mathbf{Z}_1 \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) =$$

$$(1 + C_{Z_{1/2}} \Delta\theta) \mathbf{Z}_0^* + \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Z}_0^* + \mathbf{Z}_0^* \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) , \quad (5.74)$$

wobei

$$\mathbf{S}_0^* = \mathbf{Q}_1 \mathbf{S}_0 \mathbf{Q}_1^T , \quad (5.75)$$

$$\mathbf{Z}_0^* = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Z}_0 \mathbf{Q}_1^T , \quad (5.76)$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q}_1 \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{Q}_1^T . \quad (5.77)$$

Mit den beiden Tensoren vierter Stufe \mathcal{Z} und \mathcal{P} , deren Komponenten bzgl. eines kartesischen Koordinatensystems durch

$$\mathcal{Z}_{ijml} = \mathcal{E}_{ijml} - \frac{1}{2} (\Delta\varepsilon_{im} \delta_{lj} + \delta_{il} \Delta\varepsilon_{mj}) , \quad (5.78)$$

$$\mathcal{P}_{ijml} = (1 - C_{Z_{1/2}} \Delta\theta) \mathcal{E}_{ijml} - \frac{1}{2} (\Delta\varepsilon_{im} \delta_{lj} + \delta_{il} \Delta\varepsilon_{mj}) \quad (5.79)$$

bestimmt sind sowie der Beziehung (5.71)₃ folgt aus (5.73), (5.74) und (5.67)

$${}^I\mathbf{S}_1 = {}^I\check{\mathbf{S}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) =$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\mathbf{S}_0^* + \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{S}_0^* + \mathbf{S}_0^* \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) + (1-d_0) \mathbf{C}_{1/2} [\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - C_{\alpha_{1/2}} \Delta\theta \mathbf{1}] \right] , \quad (5.80)$$

$${}^I\mathbf{Z}_1 = {}^I\check{\mathbf{Z}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) = \mathcal{P}^{-1} \left[(1 + C_{Z_{1/2}} \Delta\theta) \mathbf{Z}_0^* + \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Z}_0^* + \mathbf{Z}_0^* \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \right] , \quad (5.81)$$

$${}^I\mathbf{k}_1 = {}^I\check{\mathbf{k}}(\Delta\theta) = \frac{1}{1 - C_{K_{1/2}} \Delta\theta} \left\{ (1 + C_{K_{1/2}} \Delta\theta) \mathbf{k}_0 + (1 - d_0) (h'_{1/2} - 2 C_{K_{1/2}} h_{1/2}) \Delta\theta \right\} . \quad (5.82)$$

Weiterhin liefert Integration von (5.45) und (5.46) mit (5.41)_{4,5} sofort

$${}^I \mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_0, \quad {}^I s_1 = s_0. \quad (5.83)$$

Die inkrementelle Objektivität im Sinne von HUGHES & WINGET kann durch einen im betrachteten Zeitintervall konstanten Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{L} = \text{konst.} = \frac{2}{\Delta t} (\Delta \mathbf{F} - \mathbf{1})(\Delta \mathbf{F} + \mathbf{1})^{-1} \quad (5.84)$$

gewährleistet werden. Aufgrund dessen ist auch

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \text{konst.}, \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) = \text{konst.}, \quad (5.85)$$

und das Verzerrungsinkrement $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ ist durch

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon} = \Delta t \mathbf{D} \quad (5.86)$$

bestimmt. Zudem kann mit Hilfe der Beziehung (5.85)₂ das Anfangswertproblem (5.34) gelöst werden. Integration mit der Mittelpunktsregel und die Forderung nach Orthogonalität des Rotationstensors \mathbf{Q}_1 liefert

$$\mathbf{Q}_1 = \left(\mathbf{1} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W} \right)^{-1} \left(\mathbf{1} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{W} \right). \quad (5.87)$$

Die Herleitung der Gleichungen (5.84) und (5.87) wird ausführlich in den Arbeiten von HUGHES & WINGET [44], WEBER [101] und JANSOHN [45] beschrieben.

5.2.2 Integration des inelastischen Anteils

Als Anfangswerte für das Teilproblem II werden die Lösungen des thermoelastischen Anteils

$${}^{II} \mathbf{S}_0 = {}^I \mathbf{S}_1, \quad {}^{II} \mathbf{Z}_0 = {}^I \mathbf{Z}_1, \quad {}^{II} \mathbf{k}_0 = {}^I \mathbf{k}_1, \quad {}^{II} s_0 = {}^I s_1, \quad {}^{II} \mathbf{d}_0 = {}^I \mathbf{d}_1 \quad (5.88)$$

verwendet. Zunächst wird überprüft, ob inelastische Belastung vorliegt. Dies ist dann der Fall, wenn der Spannungspunkt außerhalb des elastischen Bereichs liegt, d.h.

$$\bar{\mathbf{F}}({}^I \mathbf{S}_1, {}^I \mathbf{Z}_1, {}^I \mathbf{k}_1, {}^I \mathbf{d}_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \left(\frac{\mathbf{S} - \mathbf{Z}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1^D \right\| - \left(\frac{\mathbf{k}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1 > 0 \quad (5.89)$$

gilt. Andernfalls ist der Deformationsprozeß rein elastisch und die gesuchten Lösungen des Anfangswertproblems II sind durch

$${}^{II} \mathbf{S}_1 = {}^I \mathbf{S}_1, \quad {}^{II} \mathbf{Z}_1 = {}^I \mathbf{Z}_1, \quad {}^{II} \mathbf{k}_1 = {}^I \mathbf{k}_1, \quad {}^{II} s_1 = {}^I s_1, \quad {}^{II} \mathbf{d}_1 = {}^I \mathbf{d}_1 \quad (5.90)$$

bestimmt.

Interessanter ist der nichttriviale Fall, der von inelastischem Fließen ausgeht. Vollimplizite Integration der Differentialgleichungen (5.47)–(5.50) liefert unter Berücksichtigung der Größen

$${}^{II}\mathbf{N}_1 = \frac{\left({}^{II}\mathbf{S}_1 - {}^{II}\mathbf{Z}_1\right)^D}{\left\|\left({}^{II}\mathbf{S}_1 - {}^{II}\mathbf{Z}_1\right)^D\right\|}, \quad (5.91)$$

$$\xi_1 := \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta t \left. \frac{d {}^{II}s}{d\zeta} \right|_{\zeta=t+\Delta t} \quad (5.92)$$

sowie dem Elastizitätstensor (3.31) das folgende Gleichungssystem:

$${}^{II}\left(\frac{\mathbf{S}}{1-d}\right)_1 = {}^I\left(\frac{\mathbf{S}}{1-d}\right)_1 - 2\mu_1 \xi_1 {}^{II}\mathbf{N}_1, \quad (5.93)$$

$${}^{II}\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right)_1 = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}b_1\xi_1} \left\{ {}^I\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right)_1 + c_1 \xi_1 {}^{II}\mathbf{N}_1 \right\}, \quad (5.94)$$

$${}^{II}\left(\frac{\mathbf{k}}{1-d}\right)_1 = \frac{1}{1+\sqrt{\frac{2}{3}}\phi_1\beta_1\xi_1} \left\{ {}^I\left(\frac{\mathbf{k}}{1-d}\right)_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\phi_1(\gamma_1+\beta_1h_1)\xi_1 \right\}, \quad (5.95)$$

$${}^{II}s_1 = {}^Is_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\xi_1, \quad (5.96)$$

$${}^{II}d_1 = {}^Id_1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ a_{01} + (a_{11}+a_{21} {}^{II}d_1) \frac{(-\Omega_{et_1})^{n_1}}{(1-{}^{II}d_1)^{q_1}} \right\} \xi_1, \quad (5.97)$$

wobei die elastische Energiefreisetzungsrate (4.90) am Inkrementende aufgrund der Beziehungen (5.91) und (5.93) durch

$$\Omega_{et_1} = - \left\{ \frac{1}{4\mu_1} \left\| \left({}^I\left(\frac{\mathbf{S}}{1-d}\right)_1 - 2\mu_1 \xi_1 {}^{II}\mathbf{N}_1 \right) \right\|^2 + \frac{1}{6(2\mu_1+3\lambda_1)} \left(\text{Sp} \left({}^I\left(\frac{\mathbf{S}}{1-d}\right)_1 \right) \right)^2 \right\} \quad (5.98)$$

festgelegt ist. Es ist ersichtlich, daß ${}^{II}\mathbf{N}_1$, ξ_1 und ${}^{II}d_1$ die maßgebenden Größen darstellen, d.h. sind deren Werte bekannt, so können unmittelbar auch die Zustandsvariablen ${}^{II}\mathbf{S}_1$, ${}^{II}\mathbf{Z}_1$, ${}^{II}\mathbf{k}_1$, und ${}^{II}s_1$ ermittelt werden. Die Berechnung von ${}^{II}\mathbf{N}_1$ und ξ_1 geht auf einen Ansatz von SIMO & TAYLOR [88] zurück, die allerdings nur lineare kinematische Verfestigung betrachteten. Dieser Ansatz wurde von HARTMANN ET. AL. [36] auf nichtlineare kinematische Verfestigung vom Armstrong-Frederick-Typ erweitert und von JANSOHN [45] übernommen.

Aus den Beziehungen (5.51) und (5.52) folgt im Falle inelastischer Belastung

$$\mathbf{F}_1 = 0 \quad (\text{PL}) \quad , \quad (5.99)$$

$$\xi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \Delta t \frac{\langle \mathbf{F}_1 \rangle^{m_1}}{\eta_1} \quad (\text{VP}) \quad (5.100)$$

mit

$$\mathbf{F}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \left\| \left(\frac{\mathbf{S} - \mathbf{Z}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1^D \right\| \right\| - \left\| \left(\frac{\mathbf{k}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1 \right\| \quad . \quad (5.101)$$

Die statische Fließfläche (5.99) und die dynamische Fließfläche, die aus Gleichung (5.100) hervorgeht, lassen sich in einheitlicher Form

$$f_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} \left\| \left\| \left(\frac{\mathbf{S} - \mathbf{Z}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1^D \right\| \right\| - k_1 = 0 \quad (5.102)$$

mit

$$k_1 = \tilde{k}(\Delta\theta, \xi_1) = \begin{cases} \left\| \left(\frac{\mathbf{k}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1 \right\| & (\text{PL}) \\ \left\| \left(\frac{\mathbf{k}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1 \right\| + \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\eta_1 \xi_1}{\Delta t} \right)^{1/m_1} & (\text{VP}) \end{cases} \quad (5.103)$$

darstellen. Ausgehend von (5.102) ergibt sich zunächst mit (5.91)

$$\left\| \left(\frac{\mathbf{S} - \mathbf{Z}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1^D \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} k_1 \left\| \mathbf{N}_1 \right\| \quad , \quad (5.104)$$

oder mittels der Beziehungen (5.93) und (5.94)

$$\left\| \left(\frac{\mathbf{S} - \mathbf{Z}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1^D \right\| = \frac{\Xi}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1} - \xi_1 \left(2\mu_1 + \frac{c_1}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1} \right) \left\| \mathbf{N}_1 \right\| \quad , \quad (5.105)$$

mit

$$\Xi = \tilde{\Xi}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, \xi_1) = \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1 \right) \left\| \left(\frac{\mathbf{S}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1^D \right\| - \left\| \left(\frac{\mathbf{Z}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1^D \right\| \quad . \quad (5.106)$$

Gleichsetzen von (5.104) und (5.105) zusammen mit der Definition

$$g_1 = \tilde{g}(\Delta\theta, \xi_1) := \left(2\mu_1 + c_1 + 2\mu_1 \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1 + \frac{2}{3} b_1 k_1 \right) \xi_1 \quad (5.107)$$

führt zu

$${}^{II}\mathbf{N}_1 = {}^{II}\tilde{\mathbf{N}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, \xi_1) = \frac{\boldsymbol{\Xi}}{g_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}k_1} . \quad (5.108)$$

Da $\|{}^{II}\mathbf{N}_1\|=1$ und der Nenner in (5.108) stets größer Null ist, folgt

$${}^{II}\Phi_1 = {}^{II}\tilde{\Phi}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, \xi_1) = \|\boldsymbol{\Xi}\| - g_1 - \sqrt{\frac{2}{3}}k_1 = 0 \quad (5.109)$$

als Bestimmungsgleichung für ξ_1 ⁷.

Die verbleibende Gleichung (5.97) liefert unter Berücksichtigung der Beziehungen (5.98), (5.80) und (5.108) eine weitere nichtlineare Gleichung

$$\begin{aligned} {}^{II},_1 &= {}^{II},\tilde{ }(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, \xi_1, {}^{II}\mathbf{d}_1) \\ &= {}^{II}\mathbf{d}_1 - {}^I\mathbf{d}_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ a_{0_1} + (a_{1_1} + a_{2_1} {}^{II}\mathbf{d}_1) \frac{(-\Omega_{et_1})^{n_1}}{(1 - {}^{II}\mathbf{d}_1)^{q_1}} \right\} \xi_1 = 0 \end{aligned} \quad (5.110)$$

zur Bestimmung von ${}^{II}\mathbf{d}_1$.

Diese Vorgehensweise ermöglicht das zu lösende Gleichungssystem von ursprünglich fünfzehn Gleichungen (5.93)–(5.97) auf die Lösung zweier nichtlinearer Gleichungen (5.109), (5.110) zu reduzieren⁸. Die beiden unbekanntenen Größen ξ_1 und ${}^{II}\mathbf{d}_1$ werden mit Hilfe des Newton-Verfahrens ermittelt. Einsetzen von ξ_1 und ${}^{II}\mathbf{d}_1$ in (5.108), (5.93)–(5.96) liefert die gesuchten Lösungen ${}^{II}\mathbf{S}_1$, ${}^{II}\mathbf{Z}_1$, ${}^{II}\mathbf{k}_1$ und ${}^{II}s_1$.

5.2.3 Integration der statischen Erholungsterme

Das Anfangswertproblem III ist nur bei viskoplastischem Materialverhalten relevant. Vollimplizite Integration des Differentialgleichungssystems (5.53)–(5.57) mit den Anfangsbedingungen

$${}^{III}\mathbf{S}_0 = {}^{II}\mathbf{S}_1, \quad {}^{III}\mathbf{Z}_0 = {}^{II}\mathbf{Z}_1, \quad {}^{III}\mathbf{k}_0 = {}^{II}\mathbf{k}_1, \quad {}^{III}s_0 = {}^{II}s_1, \quad {}^{III}\mathbf{d}_0 = {}^{II}\mathbf{d}_1 \quad (5.111)$$

und der Definition

$$\mathcal{K}_1 := \left\| \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-\mathbf{d}} \right)_1 \right\| \quad (5.112)$$

⁷ Bleiben Schädigungseffekte unberücksichtigt, d.h. $\mathbf{d}=0$, so ist (5.109) identisch mit der in [29] angegebenen Darstellung.

⁸ Im Falle $q=0$ kann Gleichung (5.110) direkt nach ${}^{II}\mathbf{d}_1$ aufgelöst werden. Somit verbleibt lediglich Gleichung (5.109), die es zu lösen gilt.

liefert für die Verfestigungsvariablen

$${}^{III}\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right)_1 = \frac{1}{1+\Delta t p_1 \mathcal{K}_1^{w_1-1}} {}^{II}\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right)_1, \quad (5.113)$$

$${}^{III}\left(\frac{k}{1-d}\right)_1 = {}^{II}\left(\frac{k}{1-d}\right)_1 - \Delta t \pi_1 \left({}^{III}\left(\frac{k}{1-d}\right)_1 - h_1 \right)^{\omega_1}, \quad (5.114)$$

während die übrigen Zustandsvariablen unverändert bleiben

$${}^{III}\mathbf{S}_1 = {}^{II}\mathbf{S}_1, \quad {}^{III}s_1 = {}^{II}s_1, \quad {}^{III}\mathbf{d}_1 = {}^{II}\mathbf{d}_1. \quad (5.115)$$

Bildet man die Norm der Beziehung (5.113), so ergibt sich

$${}^{III}\Phi_1 = {}^{III}\tilde{\Phi}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, \mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_1 + \Delta t p_1 \mathcal{K}_1^{w_1} - \left\| {}^{II}\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d}\right)_1 \right\| = 0 \quad (5.116)$$

als Bestimmungsgleichung für \mathcal{K}_1 . Für bekanntes \mathcal{K}_1 läßt sich ${}^{III}\mathbf{Z}_1$ aus Gleichung (5.113) berechnen.

Entsprechend läßt sich (5.114) in ein Nullstellenproblem der Form

$$\begin{aligned} {}^{III},_1 &= {}^{III}, \sim (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, {}^{III}k_1) \\ &= {}^{III}\left(\frac{k}{1-d}\right)_1 - {}^{II}\left(\frac{k}{1-d}\right)_1 + \Delta t \pi_1 \left({}^{III}\left(\frac{k}{1-d}\right)_1 - h_1 \right)^{\omega_1} = 0 \end{aligned} \quad (5.117)$$

überführen, aus dem iterativ ${}^{III}k_1$ bestimmt werden kann.

Die gesuchten Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ sind somit durch die Lösungen des Anfangswertproblems III

$$\mathbf{S}_1 = {}^{III}\mathbf{S}_1 = {}^{II}\mathbf{S}_1, \quad (5.118)$$

$$\mathbf{Z}_1 = {}^{III}\mathbf{Z}_1, \quad (5.119)$$

$$k_1 = {}^{III}k_1, \quad (5.120)$$

$$s_1 = {}^{III}s_1 = {}^{II}s_1, \quad (5.121)$$

$$\mathbf{d}_1 = {}^{III}\mathbf{d}_1 = {}^{II}\mathbf{d}_1 \quad (5.122)$$

gegeben.

5.2.4 Berechnung thermomechanischer Größen

Bei gekoppelten thermomechanischen Problemen muß von der Benutzerschnittstelle UMAT zusätzlich die thermoelastische Kopplung w_{et} , die spezifische plastische Spannungsleistung w_p und die in Form von innerer Energie im Material gespeicherte spezifische Leistung \dot{e}_s am Inkrementende zur Verfügung gestellt werden.

Der thermoelastische Kopplungsterm (4.93) läßt sich unter Berücksichtigung der Beziehung (5.86) durch

$$w_{et_1} = - \frac{1}{\rho_R} (1 - \mathbf{d}_1) C_{t_1} (\text{Sp } \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (5.123)$$

mit

$$C_{t_1} = 3 \kappa_1 (\alpha'_1 \Delta \theta_{r_1} + \alpha_1) \frac{\theta_1}{\Delta t} \quad (5.124)$$

darstellen. Einsetzen von (5.92) in (4.94) liefert zusammen mit (4.86)₂ für die spezifische plastische Spannungsleistung

$$w_{p_1} = \frac{1}{\rho_R} \frac{\xi_1}{\Delta t} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{N}_1 \quad (5.125)$$

mit

$$\mathbf{N}_1 = \frac{(\mathbf{S}_1 - \mathbf{Z}_1)^D}{\|(\mathbf{S}_1 - \mathbf{Z}_1)^D\|} . \quad (5.126)$$

Die spezifische Leistung infolge der Änderung der inneren Variablen

$$\dot{e}_{s_1} = \dot{e}_{sr_1} + \dot{e}_{sY_1} + \dot{e}_{sd_1} \quad (5.127)$$

kann mit Hilfe von (5.92), (4.96)–(4.100) und den Definitionen

$$C_{r_1} = \frac{1}{\gamma_1} \left(1 - \frac{\gamma'_1}{\gamma_1} \theta_1 \right) , \quad (5.128)$$

$$C_{Y_1} = \frac{1}{c_1} \left(1 - \frac{c'_1}{c_1} \theta_1 \right) \quad (5.129)$$

wie folgt geschrieben werden:

$$\dot{e}_{sr_1} = \frac{(1 - \mathbf{d}_1)}{\rho_R} \left\{ \frac{\mathbf{k}_1}{1 - \mathbf{d}_1} - \frac{\gamma'_1}{\gamma_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1 - \mathbf{d}_1} - h_1 \right) \theta_1 - h'_1 \theta_1 \right\} \dot{r}_1 , \quad (5.130)$$

$$\dot{e}_{sY_1} = \frac{(1-d_1)}{\rho_R} \left(1 - \frac{c'_1}{c_1} \theta_1 \right) \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right) \cdot \dot{\mathbf{Y}}_1 \quad , \quad (5.131)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}_{sd_1} = & -\frac{1}{\rho_R} \left\{ -\Omega_{et_1} + (\alpha'_1 \Delta\theta_{r_1} + \alpha_1) \text{Sp} \left(\frac{\mathbf{S}_1}{1-d_1} \right) \theta_1 + \frac{1}{2} C_{r_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-d_1} - h_1 \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{\gamma_1} (h_1 - h'_1 \theta_1) \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-d_1} - h_1 \right) + \frac{1}{2} C_{Y_1} \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right) \right\} \dot{\mathbf{d}}_1 \quad , \quad (5.132) \end{aligned}$$

mit

$$\dot{r}_1 = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}} \phi_1 \left(1 - \frac{\beta_1}{\gamma_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-d_1} - h_1 \right) \right) \frac{\xi_1}{\Delta t} - \frac{\pi_1}{\gamma_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-d_1} - h_1 \right)^{\omega_1} & \text{(VP)} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \phi_1 \left(1 - \frac{\beta_1}{\gamma_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-d_1} - h_1 \right) \right) \frac{\xi_1}{\Delta t} & \text{(PL)} \end{cases} \quad (5.133)$$

$$\dot{\mathbf{Y}}_1 = \begin{cases} \frac{1}{c_1} \left(c_1 \mathbf{N}_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right) + 2 \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right) \mathbf{N}_1 \right) \frac{\xi_1}{\Delta t} - \frac{p_1}{c_1} \left\| \frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right\|^{w_1-1} \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right) & \text{(VP)} \\ \frac{1}{c_1} \left(c_1 \mathbf{N}_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right) + 2 \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right) \mathbf{N}_1 \right) \frac{\xi_1}{\Delta t} & \text{(PL)} \end{cases} \quad (5.134)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(a_{0_1} + (a_{1_1} + a_{2_1} \mathbf{d}_1) \frac{(-\Omega_{et_1})^{n_1}}{(1-d_1)^{q_1}} \right) \frac{\xi_1}{\Delta t} \quad , \quad (5.135)$$

$$\Omega_{et_1} = -\frac{1}{(1-d_1)^2} \left\{ \frac{1}{4 \mu_1} \mathbf{S}_1^D \cdot \mathbf{S}_1^D + \frac{1}{6 (2 \mu_1 + 3 \lambda_1)} (\text{Sp} \mathbf{S}_1)^2 \right\} \quad . \quad (5.136)$$

Insbesondere bei der Berechnung der Tangentensteifigkeit ist es von Vorteil, die am Inkrementende berechneten Größen w_{et} , w_p und \dot{e}_s zu einem Term

$$w_{g_1} := w_{et_1} + w_{p_1} - \dot{e}_{s_1} \quad (5.137)$$

zusammenzufassen.

$${}^{II} s_1 = {}^{II} \check{s}(\check{\xi}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1)) = {}^{II} \check{s}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) . \quad (5.153)$$

Für Operator III gilt aufgrund der Beziehungen (5.116), (5.117) und (5.113)

$${}^{III} \mathcal{K}_1 = {}^{III} \check{\mathcal{K}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.154)$$

$${}^{III} \mathbf{k}_1 = {}^{III} \check{\mathbf{k}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.155)$$

$${}^{III} \mathbf{Z}_1 = {}^{III} \check{\mathbf{Z}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, \check{\mathcal{K}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1)) = {}^{III} \check{\mathbf{Z}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.156)$$

$${}^{III} \Phi_1 = {}^{III} \check{\Phi}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, \check{\mathcal{K}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1)) = {}^{III} \check{\Phi}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (5.157)$$

$${}^{III} ,_1 = {}^{III} \check{,}_1(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1, {}^{III} \check{\mathbf{k}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1)) = {}^{III} \check{,}_1(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) . \quad (5.158)$$

Die gesuchten Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ lassen sich somit entsprechend (5.118)–(5.122) in der Form

$$\mathbf{S}_1 = \check{\mathbf{S}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.159)$$

$$\mathbf{Z}_1 = \check{\mathbf{Z}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.160)$$

$$\mathbf{k}_1 = \check{\mathbf{k}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.161)$$

$$s_1 = \check{s}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.162)$$

$$\mathbf{d}_1 = \check{\mathbf{d}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) . \quad (5.163)$$

darstellen.

Für die in Kapitel 5.2.4 berechneten thermomechanischen Größen ergeben sich unter Berücksichtigung der Beziehungen

$$\mathbf{N}_1 = \check{\mathbf{N}}(\mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1) = \check{\mathbf{N}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.164)$$

$$\Omega_{et_1} = \check{\Omega}_{et}(\Delta\theta, \mathbf{S}_1, \mathbf{d}_1) = \check{\Omega}_{et}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) \quad (5.165)$$

folgende Zusammenhänge:

$$w_{et_1} = \check{w}_{et}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{d}_1) = \check{w}_{et}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.166)$$

$$w_{p_1} = \check{w}_p(\mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, \xi_1) = \check{w}_p(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.167)$$

$$\dot{e}_{sr_1} = \check{\dot{e}}_{sr}(\Delta\theta, \mathbf{k}_1, \xi_1, \mathbf{d}_1) = \check{\dot{e}}_{sr}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.168)$$

$$\dot{e}_{sY_1} = \check{\dot{e}}_{sY}(\Delta\theta, \mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, \xi_1, \mathbf{d}_1) = \check{\dot{e}}_{sY}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.169)$$

$$\dot{e}_{sd_1} = \check{\dot{e}}_{sd}(\Delta\theta, \mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, \mathbf{k}_1, \xi_1, \mathbf{d}_1) = \check{\dot{e}}_{sd}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.170)$$

$$\dot{e}_{s_1} = \check{\dot{e}}_s(\Delta\theta, \mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, \mathbf{k}_1, \xi_1, \mathbf{d}_1) = \check{\dot{e}}_s(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) , \quad (5.171)$$

$$w_{g_1} = \check{w}_g(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{S}_1, \mathbf{Z}_1, \mathbf{k}_1, \xi_1, \mathbf{d}_1) = \check{w}_g(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}, \Delta\theta, \mathbf{Q}_1) . \quad (5.172)$$

5.2.6 Beiträge zur Tangentensteifigkeit

Wie bereits in Kapitel 5.1.3 angedeutet, müssen in UMAT diejenigen Beiträge zur Tangentensteifigkeit ermittelt werden, die von den zugrunde gelegten Materialgleichungen abhängen. Hierzu wird zunächst $\tau = t + \Delta t$ gesetzt, so daß (5.159) in der Form

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{S}(\tau) = \check{\mathbf{S}}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau), \Delta\theta(\tau), \mathbf{Q}(\tau)) \quad (5.173)$$

geschrieben werden kann. Die entsprechende bar-Transformierte läßt sich als Funktion

$$\bar{\mathbf{S}}(\tau) = \mathbf{Q}^T(\tau) \mathbf{S}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) = \check{\mathbf{S}}(\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau), \Delta\theta(\tau)) \quad (5.174)$$

auffassen. Ausgehend von (5.77) und (5.174)₁ erhält man für die totalen Differentiale der bar-transformierten Größen

$$d\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) = \mathbf{Q}^T(\tau) \overset{\circ}{d}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \quad , \quad (5.175)$$

$$d\bar{\mathbf{S}}(\tau) = \mathbf{Q}^T(\tau) \overset{\circ}{d}\mathbf{S}(\tau) \mathbf{Q}(\tau) \quad , \quad (5.176)$$

wobei

$$\overset{\circ}{d}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) = d\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) - d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \quad , \quad (5.177)$$

$$\overset{\circ}{d}\mathbf{S}(\tau) = d\mathbf{S}(\tau) - d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \mathbf{S}(\tau) + \mathbf{S}(\tau) d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \quad (5.178)$$

sogenannte *Jaumann-Inkrement*e repräsentieren. Weiterhin folgt aus (5.173)

$$d\mathbf{S}(\tau) = \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}} [d\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau)] + \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta\theta} d\Delta\theta(\tau) + \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{Q}} [d\mathbf{Q}(\tau)] \quad , \quad (5.179)$$

bzw. unter Berücksichtigung von (5.177) und (5.178)

$$\overset{\circ}{d}\mathbf{S}(\tau) = \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \left[\overset{\circ}{d}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) \right] + \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta\theta} d\Delta\theta(\tau) + \mathcal{N}[d\mathbf{Q}(\tau)] \quad (5.180)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{N}[d\mathbf{Q}(\tau)] &= \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \left[d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\tau) d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \right] + \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{Q}} [d\mathbf{Q}(\tau)] - \\ &\quad - d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \mathbf{S}(\tau) + \mathbf{S}(\tau) d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \quad . \end{aligned} \quad (5.181)$$

Ersetzt man die Jaumann-Inkrementen mit Hilfe der Gleichungen (5.175) und (5.176), so führt dies zu

$$\begin{aligned} d\bar{\mathbf{S}}(\tau) &= \mathbf{Q}^T(\tau) \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \left[\mathbf{Q}(\tau) d\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \right] \mathbf{Q}(\tau) + \mathbf{Q}^T(\tau) \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} \mathbf{Q}(\tau) d\Delta \theta(\tau) + \\ &+ \mathbf{Q}^T(\tau) \mathcal{N} [d\mathbf{Q}(\tau)] \mathbf{Q}(\tau) \quad . \end{aligned} \quad (5.182)$$

Das totale Differential $d\bar{\mathbf{S}}(\tau)$ kann aufgrund der Beziehung (5.174) auch in der Form

$$d\bar{\mathbf{S}}(\tau) = \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} [d\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau)] + \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta(\tau) \quad (5.183)$$

dargestellt werden. Koeffizientenvergleich von (5.182) und (5.183) liefert

$$\frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} [d\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau)] = \mathbf{Q}^T(\tau) \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \left[\mathbf{Q}(\tau) d\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \right] \mathbf{Q}(\tau) \quad , \quad (5.184)$$

$$\frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} = \mathbf{Q}^T(\tau) \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} \mathbf{Q}(\tau) \quad , \quad (5.185)$$

$$\mathcal{N} [d\mathbf{Q}(\tau)] = \mathbf{0} \quad , \quad (5.186)$$

und somit für (5.180) unter Einbeziehung von (5.178)

$$d\mathbf{S}(\tau) = d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \mathbf{S}(\tau) - \mathbf{S}(\tau) d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) + \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \left[\overset{\circ}{d}\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) \right] + \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta(\tau) \quad . \quad (5.187)$$

Mittels dieser Beziehung wird der Term $d\mathbf{S}(\tau)$ in Gleichung (5.29) bestimmt. Hierbei obliegt es dem Benutzer die Tensoren

$$\frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \frac{\partial \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} \quad (5.188)$$

am Inkrementende bereitzustellen, während die übrigen Größen von ABAQUS intern berechnet werden (siehe hierzu JANSOHN [45], NAGDEGALL ET. AL. [76]).

Weiterhin muß der in Gleichung (5.25) auftretende Term

$$dw_g(\tau) = dw_{et}(\tau) + dw_p(\tau) - d\dot{e}_s(\tau) \quad (5.189)$$

ermittelt werden. Wie man unschwer erkennen kann, läßt sich $w_g(\tau)$ als Funktion

$$w_g(\tau) = \check{w}_g(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\tau), \Delta \theta(\tau), \mathbf{Q}(\tau)) = \widehat{w}_g(\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau), \Delta \theta(\tau)) \quad (5.190)$$

darstellen. Man erhält ausgehend von (5.190)₁ unter Einbeziehung von (5.177) für das totale Differential

$$dw_g(\tau) = \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathring{d} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta(\tau) + \mathbf{F} \cdot d\mathbf{Q}(\tau) \quad (5.191)$$

mit

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{Q}(\tau) = \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \left(d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \Delta \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon} d\mathbf{Q}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \right) + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{Q}} \cdot d\mathbf{Q}(\tau) \quad (5.192)$$

oder aus (5.190)₂

$$dw_g(\tau) = \frac{\partial \widehat{w}_g}{\partial \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot d\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) + \frac{\partial \widehat{w}_g}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta(\tau) \quad (5.193)$$

Ein Koeffizientenvergleich dieser beiden Gleichungen führt unter Berücksichtigung von (5.175) zu

$$\frac{\partial \widehat{w}_g}{\partial \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} \cdot d\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) = \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \left(\mathbf{Q}(\tau) d\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tau) \mathbf{Q}^T(\tau) \right) \quad (5.194)$$

$$\frac{\partial \widehat{w}_g}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \theta} \quad (5.195)$$

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{Q}(\tau) = \mathbf{0} \quad (5.196)$$

so daß aus (5.191)

$$dw_g(\tau) = \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \cdot \mathring{d} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}(\tau) + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \theta} d\Delta \theta(\tau) \quad (5.197)$$

folgt.

Zusätzlich zu den Tensoren (5.188)₁ und (5.188)₂ müssen somit in UMAT die Größen

$$\frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \theta} \quad (5.198)$$

am Inkrementende ermittelt werden. Auf die Berechnung dieser vier Ausdrücke wird gesondert im Anhang C eingegangen.

6 Numerische Beispiele

Im ersten Teil dieses Kapitels werden verschiebungsgesteuerte Prozesse betrachtet. Zunächst wird anhand einer einachsigen homogenen zyklischen Belastung der in Kapitel 5 erläuterte Spannungsalgorithmus verifiziert. Hierzu wurden die Ergebnisse der FE-Simulation mit den Lösungen eines expliziten Runge-Kutta-Verfahrens vierter Ordnung verglichen. Weiterhin wird am Beispiel einer einachsigen monotonen Zugbelastung der Einfluß des Materialparameters ϕ auf den Energiehaushalt diskutiert. Als FE-Anwendung wird im Anschluß daran der Einschnürvorgang einer axialsymmetrischen Zugprobe betrachtet. Anders als in der Literatur allgemein üblich (siehe hierzu z.B. [52], [80], [91]) wird die Einschnürung weder durch eine geometrische noch durch eine thermische Imperfektion ausgelöst. Vielmehr stellt sich infolge der dissipativen Vorgänge und der thermischen Randbedingungen eine inhomogene Temperaturverteilung ein, die aufgrund der temperaturabhängigen Materialparametern eine Einschnürung zur Folge hat.

Der zweite Teil dieses Kapitels behandelt kraftgesteuerte Prozesse. Anhand einer einachsigen Kriechbeanspruchung wird zunächst der Einfluß der Recovery-Parameter π, p und ω, w auf das Materialverhalten untersucht. Die abschließende FE-Simulation zeigt den Einfluß der statischen Erholungsterme auf das Verformungsverhalten eines mit Innendruck und Temperatur beaufschlagten dünnwandigen Zylinders.

6.1 Einachsige zyklische Belastung mit Haltezeiten

Die Berechnungen basieren auf der Annahme eines homogenen Deformationszustands. Die konstitutiven Gleichungen wurden einachsig formuliert und mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung numerisch integriert. Für die FE-Simulationen wurde ein 8-knotiges, axialsymmetrisches Element mit reduzierter Integrationsordnung des Typs CAX8RT¹ verwendet. Die technische Dehnung ε_t wurde so vorgegeben, daß die in Abbildung 6.1 dargestellte zyklische Belastung mit Haltezeiten entstand. Es wurden zwei Zyklen mit einer Dehnschwingbreite von 10% und je zwei Haltezeiten im Zug- und Druckbereich von 50 s simuliert. Außerhalb der Haltephasen betrug die technische Dehnrates $\dot{\varepsilon}_t = \pm 10^{-3}/s$. Wie aus Tabelle 6.1 hervorgeht, wurden zwei Parametersätze bei 293 K und 593 K vorgegeben, wobei insbesondere die Materialparameter $k_0, \phi, \beta, \gamma, h, \omega, b, c, w$ und m temperaturabhängig gewählt wurden. Zwischen den beiden Temperaturstützstellen werden die Materialparameter linear interpoliert. Die Anfangstemperatur θ_i betrug 300 K.

¹siehe ABAQUS User's Manual [41].

Tab. 6.1: Materialparameter bei 293 K und 593 KMaterialparameter bei $\theta = 293$ K:

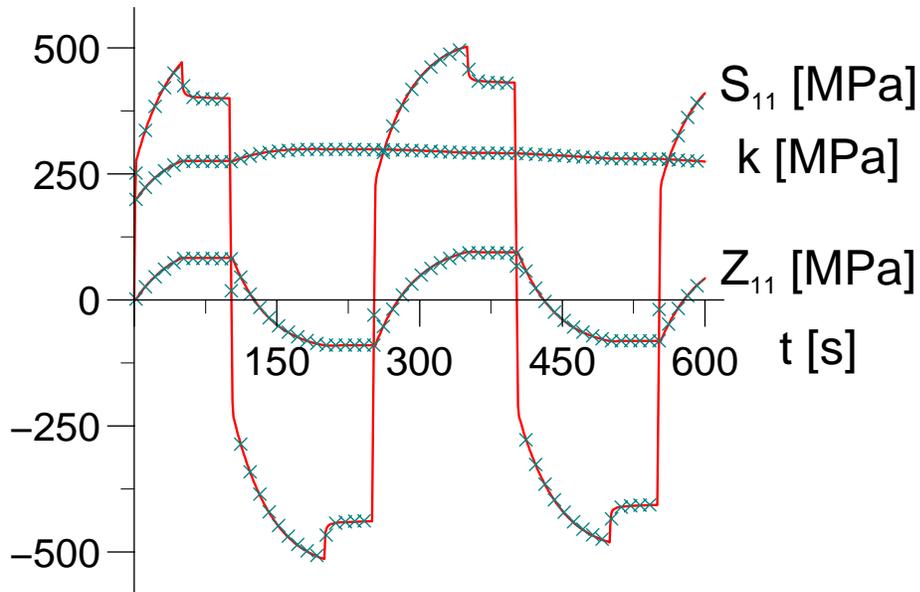
$\rho_0 = 7.85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	$\phi = 0.7$	$c = 3000 \text{ MPa}$
$c_\varepsilon = 540 \text{ J/(kg K)}$	$\phi\beta = 25$	$p = 10^{-4} \text{ MPa}^{1-w}/\text{s}$
$E = 200 \text{ GPa}$	$\phi\gamma = 3000 \text{ MPa}$	$w = 1$
$\nu = 0.3$	$k_0 = 200 \text{ MPa}$	$a_0 = 0.05$
$\alpha = 1.1 \cdot 10^{-5}/\text{K}$	$h = 200 \text{ MPa}$	$a_1 = 0.15 \text{ MPa}^{-n}$
$\theta_R = 293 \text{ K}$	$\pi = 10^{-4} \text{ MPa}^{1-\omega}/\text{s}$	$a_2 = 0.6 \text{ MPa}^{-n}$
$m = 2.3$	$\omega = 1$	$n = 0.01$
$\eta = 2 \cdot 10^7 \text{ MPa}^m\text{s}$	$b = 25$	$q = 2$

Materialparameter bei $\theta = 593$ K:

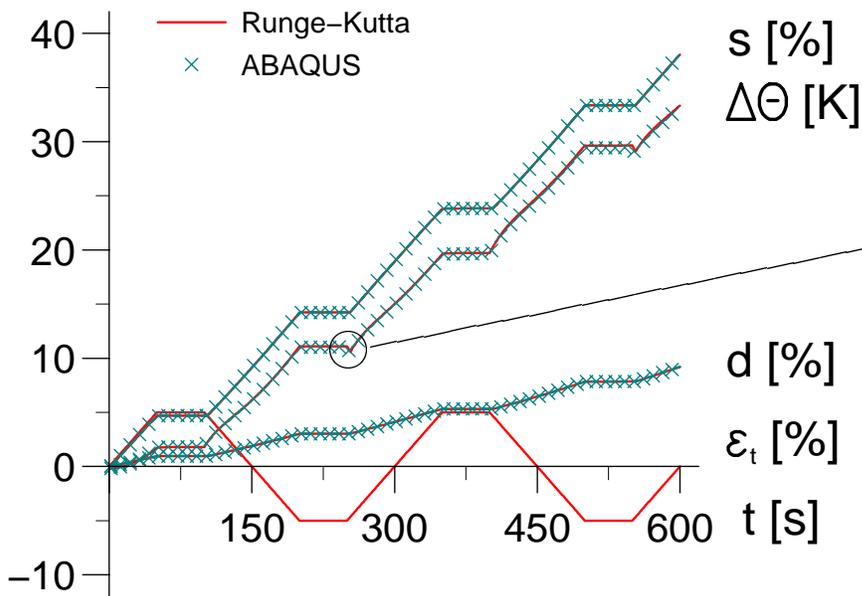
$\rho_0 = 7.85 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	$\phi = 0.1$	$c = 600 \text{ MPa}$
$c_\varepsilon = 540 \text{ J/(kg K)}$	$\phi\beta = 10$	$p = 10^{-4} \text{ MPa}^{1-w}/\text{s}$
$E = 200 \text{ GPa}$	$\phi\gamma = 600 \text{ MPa}$	$w = 1.3$
$\nu = 0.3$	$k_0 = 100 \text{ MPa}$	$a_0 = 0.05$
$\alpha = 1.1 \cdot 10^{-5}/\text{K}$	$h = 100 \text{ MPa}$	$a_1 = 0.15 \text{ MPa}^{-n}$
$\theta_R = 293 \text{ K}$	$\pi = 10^{-4} \text{ MPa}^{1-\omega}/\text{s}$	$a_2 = 0.6 \text{ MPa}^{-n}$
$m = 2$	$\omega = 1.3$	$n = 0.01$
$\eta = 2 \cdot 10^7 \text{ MPa}^m\text{s}$	$b = 10$	$q = 2$

Der Vergleich zwischen der „exakten“ Lösung, die mit einem expliziten Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitenkontrolle ermittelt wurde und der FE-Simulation zeigt Abbildung 6.1. Bei Vorgabe eines maximal zulässigen Zeitinkrements von $\Delta t = 2\text{s}$ weist die FE-Analyse eine sehr gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung auf². Mit zunehmender Schrittweite ergäbe sich allerdings eine Abweichung von der exakten Lösung (siehe hierzu JANSOHN [45]). Die Viskositätsparameter η und m wurden so gewählt, daß die wahre Spannung S_{11} bei konstant gehaltener Dehnung innerhalb von relativ kurzer Zeit auf eine annähernd konstante Spannung relaxiert. Die Verläufe der Verfestigungsvariablen k und Z_{11} während des Relaxationsvorgangs machen deutlich, daß die zugrunde gelegten Recovery-Parameter π , p und ω , w das Materialverhalten nur geringfügig beeinflussen. Erst bei deutlich größeren Relaxationszeiten käme es zu einer merklichen Abnahme der isotropen und kinematischen Verfestigung. Wie aus dem Temperaturverlauf ersichtlich ist, bewirkt die thermomechanische Kopplung einen Temperaturanstieg um 32 K. Bei rein elastischer Beanspruchung nimmt die Temperatur infolge der thermoelastischen Kopplung geringfügig ab (siehe vergrößerte Darstellung).

²Zu beachten ist hierbei, daß in Abbildung 6.1 nur jeder fünfte Zeitschritt eingezeichnet ist.



— Runge-Kutta
 × ABAQUS



— Runge-Kutta
 × ABAQUS

Abb. 6.1: Vergleich zwischen Runge-Kutta und ABAQUS (maximal zulässige Schrittweite $\Delta t = 2$ s). Spannungsantworten (oben) sowie plastische Bogenlänge s , Temperaturdifferenz $\Delta\theta = \theta - \theta_i$, Schädigung d und Lastgeschichte (unten).

6.2 Energetische Betrachtungen

In diesem Kapitel soll anhand einer einachsigen homogenen Zugbeanspruchung gezeigt werden, inwiefern der in die isotrope Verfestigung eingehende Materialparameter ϕ den Energiehaushalt eines Systems zu beeinflussen vermag. Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß der Ansatz der isotropen Verfestigung Gegenstand laufender Untersuchungen ist, so daß die Ausführungen hier rein exemplarischen Charakter besitzen.

Als ein Maß für die im Material gespeicherte Energie dient üblicherweise das Verhältnis aus dem plastischen Anteil der spezifischen freien Energiefunktion Ψ_p und der spezifischen plastischen Arbeit³

$$e_p(t) := \int_{t_0}^t w_p(\tau) d\tau \quad . \quad (6.1)$$

Die Berechnungen wurden mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung durchgeführt, wobei die beiden Materialparametersätze aus Tabelle 6.1 zugrunde gelegt wurden. Der Materialparameter ϕ wurde allerdings temperaturunabhängig angenommen. Um zu gewährleisten, daß der Verlauf der isotropen Verfestigung unabhängig von ϕ ist, wurden die Verfestigungsparameter β und γ an den Temperaturstützstellen so gewählt, daß die Produkte $\phi\beta$ und $\phi\gamma$ stets konstant sind. Infolgedessen wird durch ϕ lediglich der Anteil Ψ_p^{iso} der spezifischen freien Energiefunktion beeinflusst⁴.

Aus Abbildung 6.2 geht hervor, daß mit kleiner werdendem ϕ der Anteil der im Material gespeicherten Energie abnimmt. Daher wird mehr Energie in Dissipationswärme umgewandelt, was wiederum zur Folge hat, daß die Temperatur stärker ansteigt. In diesem Zusammenhang durchgeführte Experimente von CHRYSOCHOOS [19, 20] an austenitischen Stählen haben gezeigt, daß der Verlauf von Ψ_p/e_p zu Beginn der Belastung zunächst ein Maximum aufweist und anschließend monoton abfällt. Weiterhin kann das Verhältnis Ψ_p/e_p bei Dehnungen kleiner als 10% durchaus Größenordnungen von bis zu 50% annehmen. Um diese experimentellen Befunde in befriedigender Weise wiedergeben zu können, sollte somit bei diesem Satz von Materialparametern $\phi < 1$ vorgegeben werden.

³siehe CHABOCHE [14], [15] und die darin zitierte Literatur.

⁴siehe Gleichungen (4.15), (4.19).

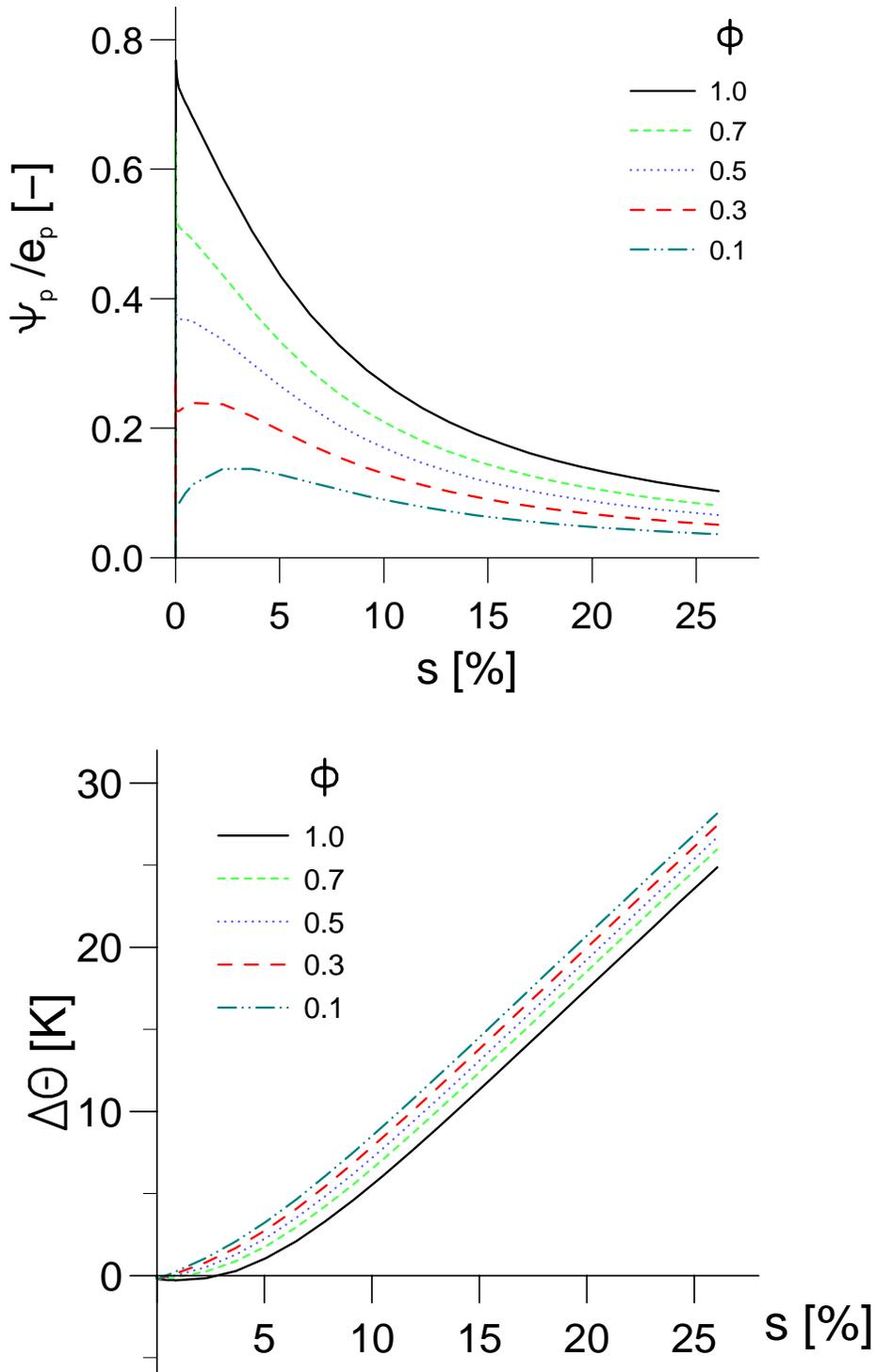


Abb. 6.2: Einfluß des Materialparameters Φ bei einachsigem Zug auf das Verhältnis Ψ_p/e_p und die Temperaturdifferenz $\Delta\theta = \theta - \theta_i$.

6.3 Einschnürung eines axialsymmetrischen Stabes

Ein in der Literatur häufig diskutiertes Problem ist die Simulation eines Zugversuchs mit Einschnürung. Die Einschnürung wird hierbei in der Regel durch geometrische oder thermische Imperfektionen ausgelöst⁵. Das folgende Beispiel soll verdeutlichen, daß bei einer gekoppelten thermomechanischen Analyse der Einschnürvorgang auch ohne Vorgabe von Imperfektionen beschrieben werden kann⁶.

Betrachtet wurde eine zylindrische Probe der Länge $2l_0 = 50$ mm und dem Radius $r_0 = 5$ mm. Die Diskretisierung erfolgte, wie in Abbildung 6.3 dargestellt, mit 126 8-knotigen, axialsymmetrischen Elementen des Typs CAX8RT. Der Zugversuch wurde weggesteuert simuliert durch Vorgabe der Verschiebung an der Stirnfläche der Probe. Die Lastgeschichte ist ebenfalls in Abbildung 6.3 dargestellt. Nach anfänglich vier Zyklen mit einer Dehnschwingbreite von 1% bei Mitteldehnungen von 1%, 2.5%, 4% und 5.5% sowie Haltezeiten von je 25 s im Zug- und Druckbereich, erfolgte eine monotone Zugbelastung bis zu einer technischen Dehnung von 50%. Außerhalb der Haltephasen betrug die technische Dehnrates $\dot{\epsilon}_t = \pm 10^{-3}/s$. Die Anfangstemperatur θ_i der Zugprobe wurde gleich der Umgebungstemperatur $\theta_u = 300$ K gesetzt. Um dem Einfluß der Einspannung gerecht zu werden, wurde der Wärmeübergangskoeffizient an der Stirnfläche wesentlich größer gewählt als an der Mantelfläche. An Stirn- und Mantelfläche der Probe wurden Wärmeübergangskoeffizienten von 10^4 W/(m²K) und 10 W/(m²K) vorgegeben. Die FE-Analysen erfolgten mit den Materialdaten aus Tabelle 6.1, wobei allerdings die statischen Erholungsterme unberücksichtigt blieben, d.h. $\pi = p = 0$ gesetzt wurde. Es wurden jeweils eine FE-Rechnung mit und ohne Schädigung durchgeführt und mit den entsprechenden homogenen, adiabatischen Lösungen, die mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung ermittelt wurden, verglichen.

⁵siehe z.B. LÄMMER ET AL. [52], RITTER [80], in deren Arbeiten unter anderem der Einfluß axialsymmetrischer Imperfektionen auf das Verformungsverhalten von zylindrischen Zugstäben untersucht wurde.

⁶siehe hierzu auch die Arbeiten von LEHMANN & BLIX [55], MIEHE [72] und SIMO & MIEHE [87].

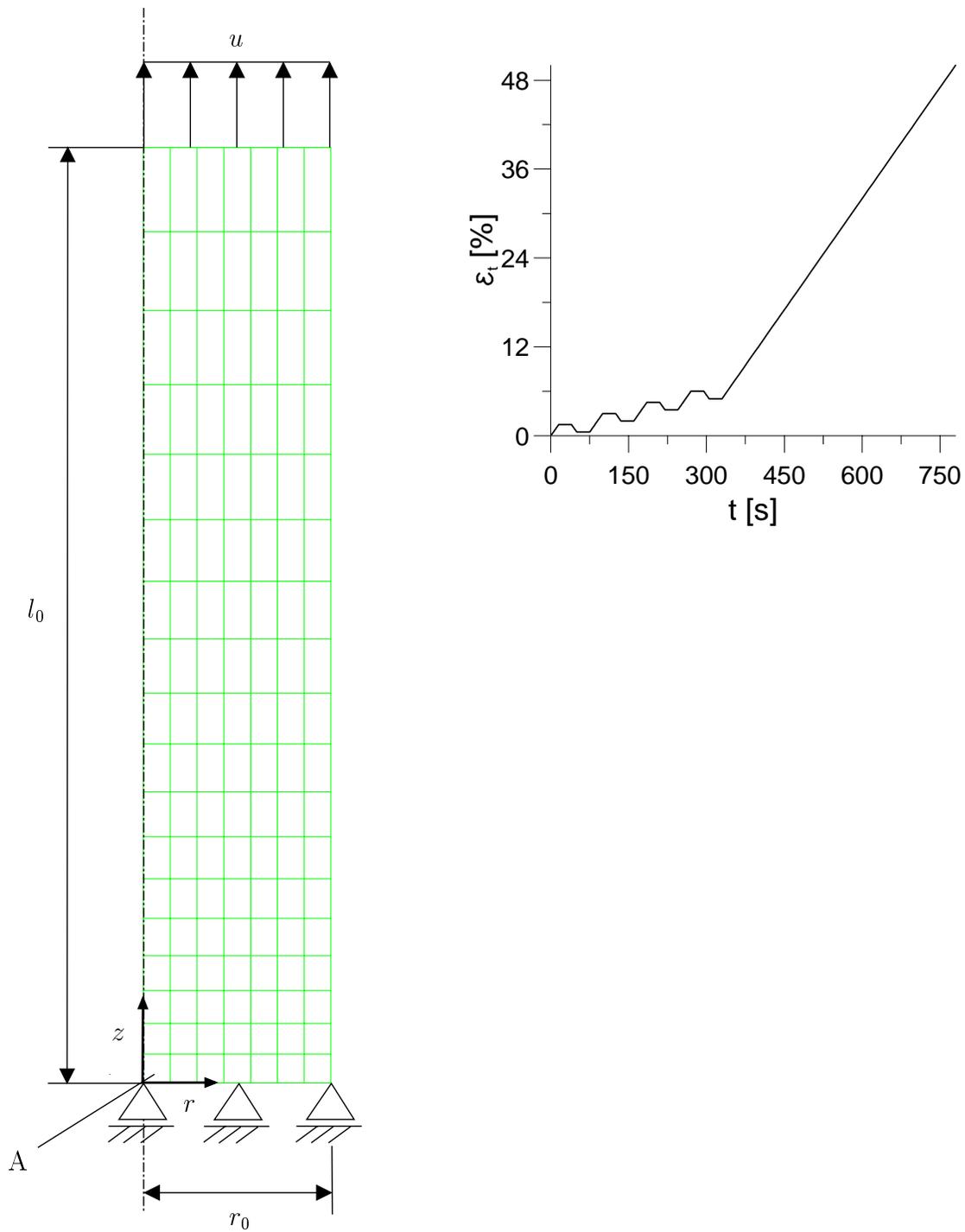


Abb. 6.3: FE-Netz und Randbedingungen (links):
 technische Dehnung $\varepsilon_t = u/l_0$ in Abhängigkeit von der Zeit (rechts).

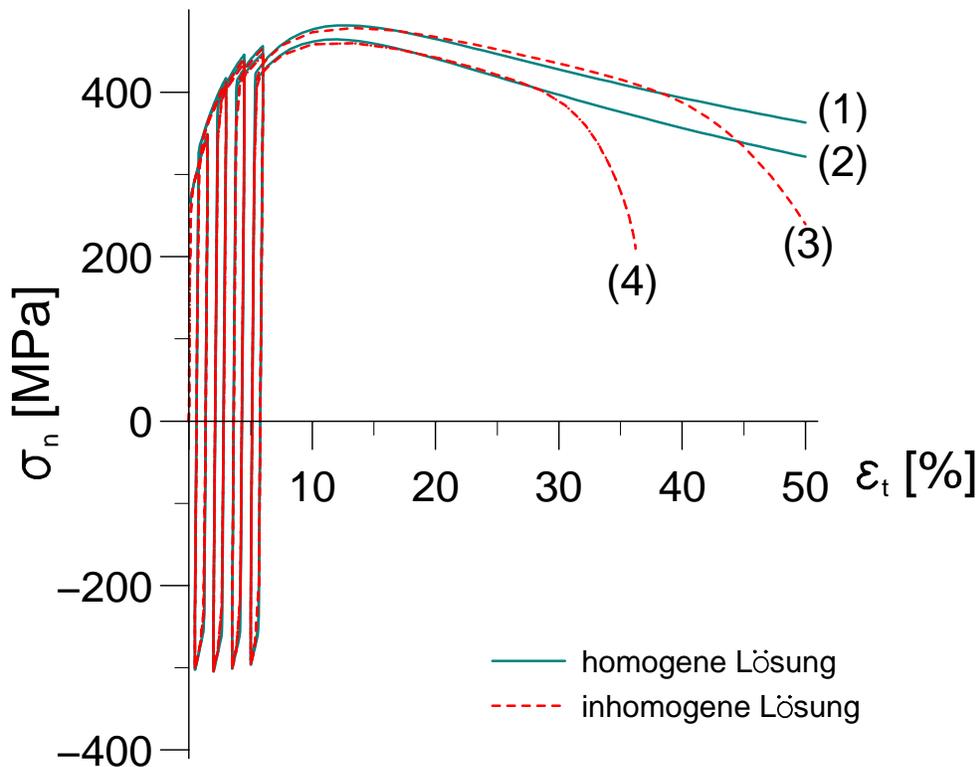


Abb. 6.4: Nennspannungs-Totaldehnungs-Verläufe, ohne Schädigung (Kurven (1) und (3)), mit Schädigung (Kurven (2) und (4)).

Abbildung 6.4 soll anhand der Nennspannungs-Totaldehnungs-Verläufe den Einfluß der Schädigung auf das nachkritische Verformungsverhalten verdeutlichen. Die Kurven (3) und (4) zeigen die inhomogenen Lösungen ohne bzw. mit Schädigung. In beiden Fällen beginnt die Probe nach Erreichen der Maximallast vom oberen Ende her zu entlasten. Die Probe beginnt sich lokal einzuschnüren, wobei das Material im Bereich der Einschnürstelle weiterhin plastische Deformationen erfährt. Die Einschnürung bewirkt einen Steilabfall im Kraft-Verlängerungs-Diagramm. Aufgrund der Schädigung nimmt die Maximallast ab und die Entlastung setzt bereits zu einem früheren Zeitpunkt ein. Desweiteren führt die Schädigung zu einem steileren Abfall der Kurve im nachkritischen Bereich. Die ebenfalls in Abbildung 6.4 eingezeichneten homogenen Lösungen ohne bzw. mit Schädigung (Kurven (1) und (2)) gehen aus dem adiabaten Fall hervor, bei dem jeglicher Wärmefluß über Stirn- und Mantelfläche der Probe unterbunden wird.

Abbildung 6.5 soll den Unterschied zwischen der homogenen Lösung mit Schädigung (2) und der inhomogenen Lösung mit Schädigung (4) zum Ausdruck bringen. Sowohl die Spannungsantworten als auch die Verläufe der plastischen Bogenlänge und der Schädigung am Integrationspunkt A (siehe Abbildung 6.3) machen deutlich, daß merkliche Abweichungen erst im

nachkritischen Bereich auftreten. Während im homogenen Fall plastische Bogenlänge und Schädigung nach Erreichen der Maximallast nahezu linear anwachsen, kommt es im inhomogenen Fall zu einer Verformungslokalisierung und somit zu einer nichtlinearen Schädigungsakkumulation. Der exponentielle Anstieg der Schädigung führt, wie aus den Spannungsantworten ersichtlich ist, zu einem unmittelbaren Verlust der Tragfähigkeit. Bedingt durch die Querschnittsminderung infolge der Einschnürung nimmt die Axialkomponente des Cauchy'schen Spannungstensors S_{11} zunächst sehr stark zu und zwar solange bis der Schädigungseinfluß dominiert. Aufgrund der unterschiedlichen thermischen Randbedingungen ist die Temperaturentwicklung am Integrationspunkt A grundsätzlich verschieden. Da im homogenen Fall kein Wärme fluß über die freien Oberflächen erfolgt, stellt sich eine merklich höhere Temperatur ein. Im inhomogenen Fall hingegen ist nach der zyklischen Beanspruchung kein wesentlicher Temperaturanstieg zu verzeichnen. Dies liegt daran, daß während der Haltezeiten Wärme über die freien Oberflächen abfließt und somit ein Temperaturengleich stattfindet. Erst die anschließende monotone Zugbelastung führt zu einer deutlichen Temperaturzunahme.

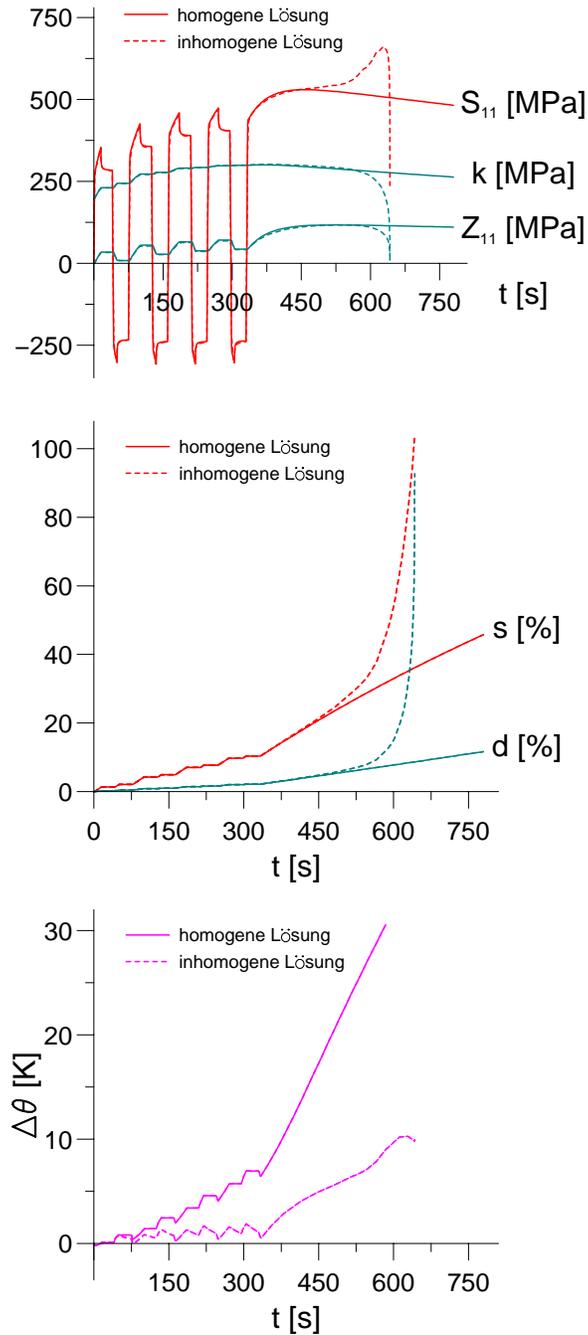


Abb. 6.5: Zeitliche Entwicklung der Spannungen (oben), der plastischen Bogenlänge s und der Schädigung d (Mitte) sowie der Temperaturdifferenz $\Delta\theta = \theta - \theta_i$ (unten) am Integrationspunkt A (siehe Abb. 6.3).

Abbildung 6.6 soll die Unterschiede zwischen den inhomogenen Lösungen mit und ohne Schädigung (Kurven (4) und (3) in Abbildung 6.4) verdeutlichen. Hierzu wird die Entwicklung der Temperatur, der plastischen Bogenlänge und der Schädigung in axialer und radialer Richtung bei unterschiedlichen Totaldehnungen betrachtet. Die Ergebnisse sind an den Integrationspunkten dargestellt und über der undeformierten Struktur aufgetragen.

Wie aus Abbildung 6.6 a) hervorgeht, hat die aufgrund der inelastischen Deformationen dissipierte Wärme eine kontinuierliche Aufheizung des Zugstabes zur Folge. Gleichzeitig wird jedoch über die freien Ränder Wärme abgeführt, so daß im Innern der Probe die höchste Temperatur vorliegt. Der sehr viel größere Wärmeübergangskoeffizient an der Stirnfläche bewirkt einen steilen Temperaturgradienten in axialer Richtung, während in radialer Richtung nur ein minimaler Temperaturgradient zu verzeichnen ist. Bei Dehnungen kleiner als 20.2% hat die Schädigung noch keinen erkennbaren Einfluß auf die Temperaturverteilung. Erst bei einer Dehnung von 33.8% beispielsweise stellt sich infolge der Schädigung eine um ca. 2 K höhere Temperatur im Innern der Probe ein.

Die im Bereich der Einschnürung auftretende Verformungs- und Schädigungslokalisierung ist in den Abbildungen 6.6 b) und c) dargestellt. Es ist ersichtlich, daß bis zu Dehnungen von 20.2% noch ein nahezu homogener Verzerrungs- und Schädigungszustand vorliegt. Bei etwa 31% beginnt die Probe vom oberen Ende her zu entlasten (siehe Kurve (4) in Abbildung 6.4). Mit zunehmender Dehnung reduziert sich der Bereich der plastisch beanspruchten Zone und die Probe schnürt, wie in Abbildung 6.7 (oben) dargestellt, an der Stelle $z=0$ ein. Die größten Verzerrungen liegen im Innern der Probe vor. Dies ist auch der am stärksten geschädigte Bereich. Bei einer technischen Dehnung von 36% wird im Innern der Probe eine Schädigung von fast 60% erreicht, während die plastische Bogenlänge dort annähernd 100% beträgt. Die starke Schädigung in der Probenmitte führt, wie anhand der Spannungsverteilung in Abbildung 6.7 (oben) zu erkennen ist, zu einem Verlust der Tragfähigkeit. Anders sind die Verhältnisse ohne Schädigung. Hier beginnt die Entlastung erst bei einer technischen Dehnung von 40% (siehe Kurve (3) in Abbildung 6.4). Deshalb ist in diesem Fall selbst bei einer Dehnung von 36% noch ein nahezu homogener Spannungs- und Verzerrungszustand gewährleistet (siehe Abbildung 6.7 unten).

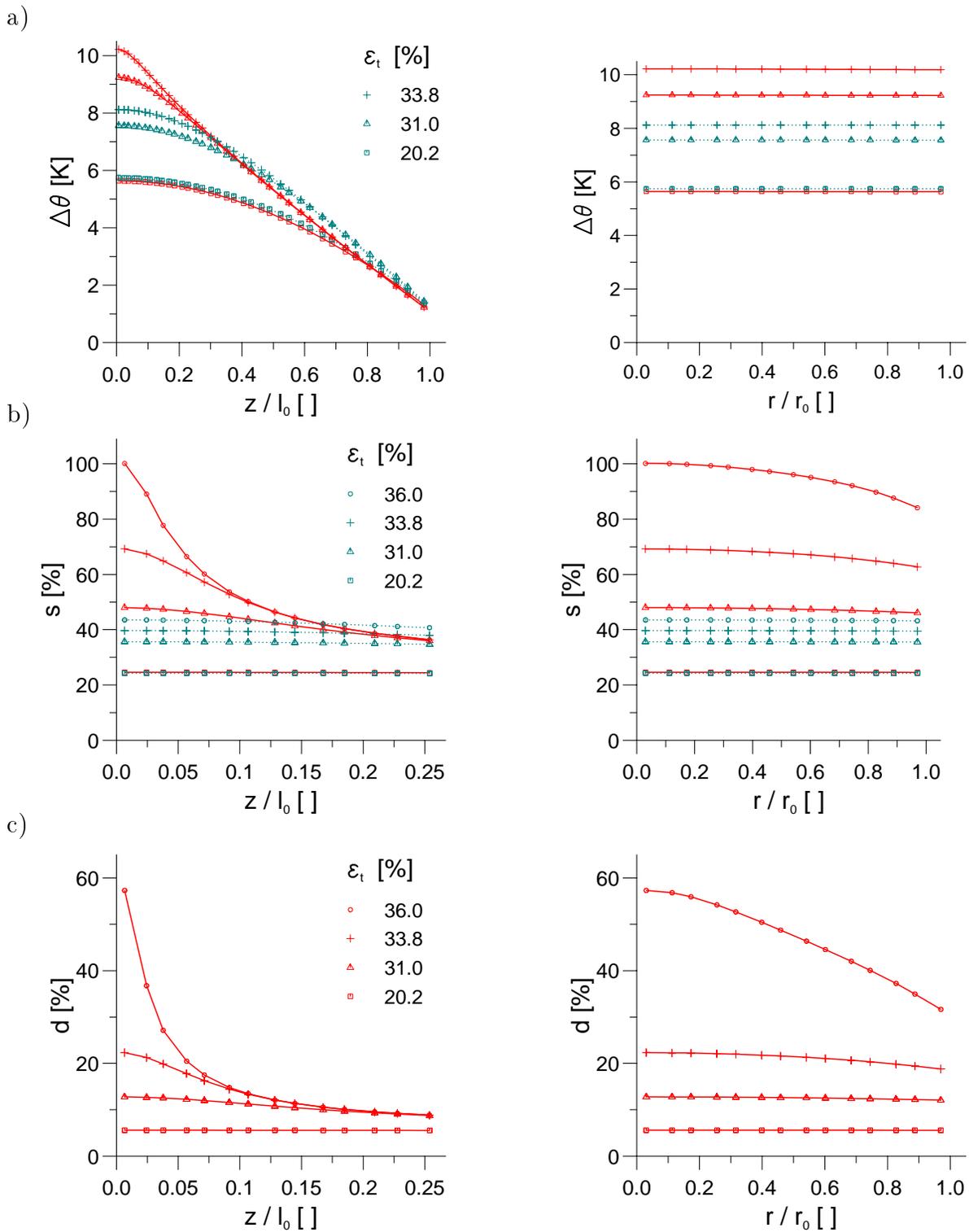


Abb. 6.6: Temperaturdifferenz $\Delta\theta = \theta - \theta_i$, plastische Bogenlänge s und Schädigung d in axialer Richtung an der Stelle $r = 0$ sowie in radialer Richtung an der Stelle $z = 0$ für unterschiedliche Totaldehnungen. Mit Schädigung (durchgezogene Linien), ohne Schädigung (punktete Linien).

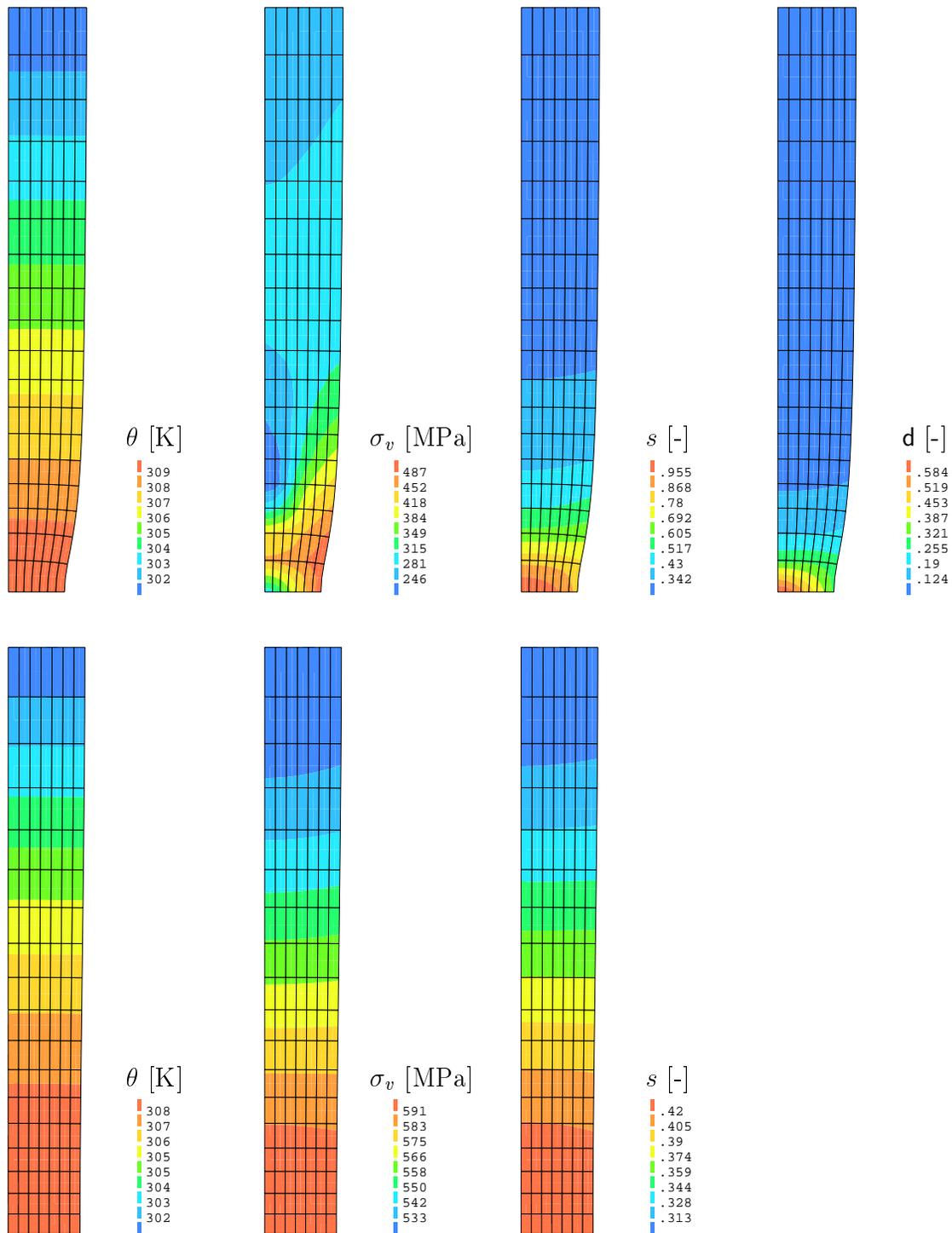


Abb. 6.7: Deformierte Strukturen bei einer technischen Dehnung von 36% (mit Schädigung (oben), ohne Schädigung (unten)). Temperaturverteilung θ , v.Mises Norm des Cauchy'schen Spannungstensors σ_v , plastische Bogenlänge s und Schädigung d .

6.4 Einachsige homogene Kriechbeanspruchung

Das folgende Beispiel soll den Einfluß der statischen Erholung verdeutlichen. Hierzu wurde ein mit konstanter Kraft durchgeführter Kriechversuch bei einer Nennspannung von 320 MPa simuliert. Die Kriechspannung wurde mit einer konstanten Belastungsgeschwindigkeit von 0.1 MPa/s aufgeprägt. Die einachsig formulierten Gleichungen wurden mit Hilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens 4. Ordnung numerisch integriert, wobei der Materialparametersatz bei 293 K aus Tabelle 6.1 zugrunde gelegt wurde. Die ermittelten zeitlichen Verläufe der Totaldehnung und der Schädigung in Abhängigkeit von den Recovery-Parametern p, π und w, ω zeigt Abbildung 6.8.

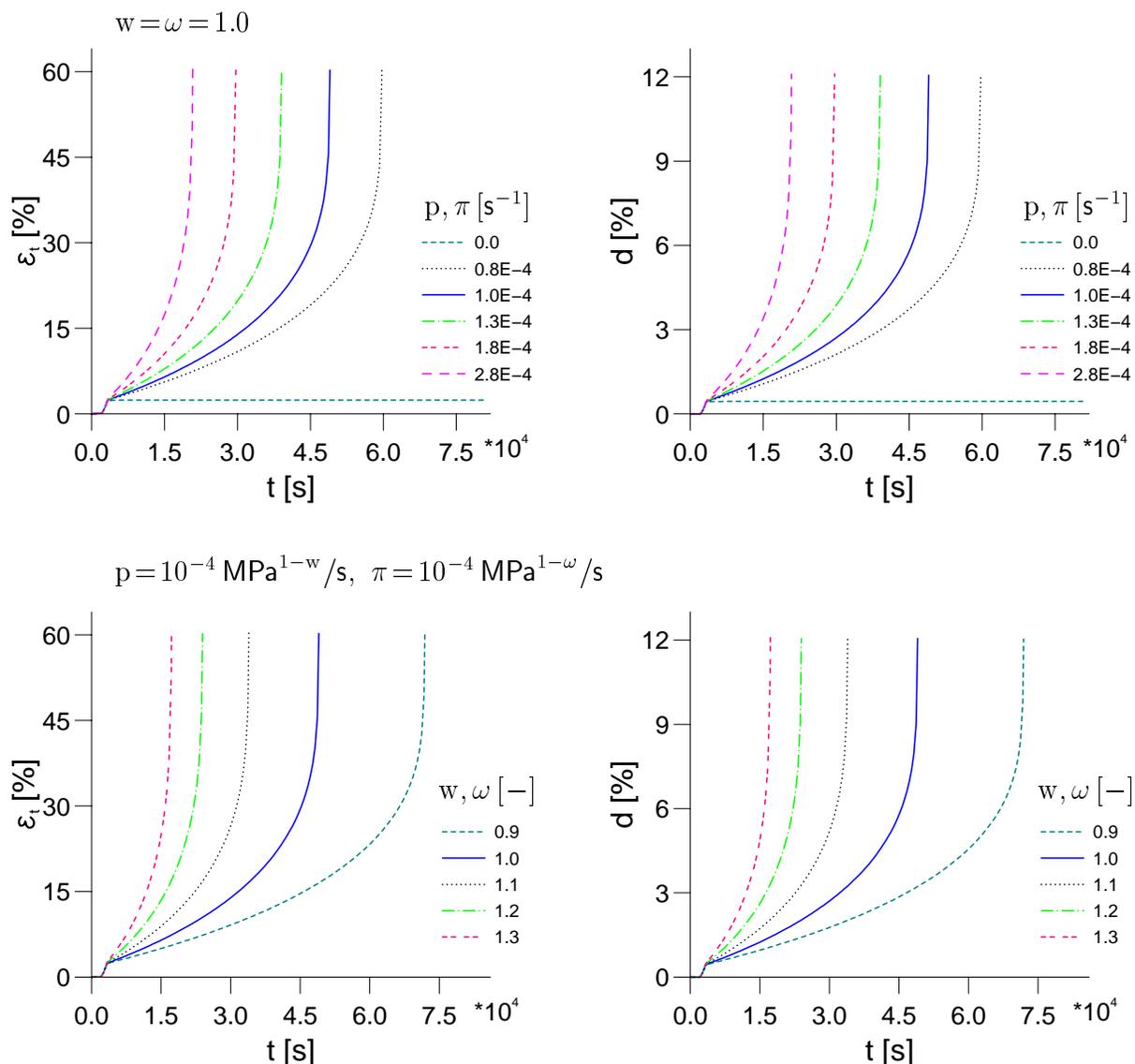


Abb. 6.8: Zeitliche Verläufe der Totaldehnung ϵ_t und der Schädigung d in Abhängigkeit von den Recovery-Parametern p, π (oben) und w, ω (unten).

Die Kriechkurven geben qualitativ den für Metalle charakteristischen Verlauf wieder, der durch den Primärbereich mit sehr hohen Kriechraten zu Beginn der Belastung, den Sekundärbereich mit praktisch konstanter Kriechrate und den Tertiärbereich mit zunächst allmählichem dann beschleunigtem Wiederanstieg der Kriechrate bis zum Bruch gekennzeichnet ist⁷. Es ist ferner ersichtlich, daß zunehmende statische Erholung, d.h. größer werdendes p, π bzw. w, ω zu einer höheren Kriechrate im sekundären Bereich und somit zu einer geringen Kriechbruchzeit führt. Ohne statische Erholung ($p = \pi = 0$) nähert sich die technische Dehnung für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch einem Grenzwert. Dies liegt daran, daß bei einer Kriechspannung von 320 MPa die Spannungs-Dehnungs-Kennlinie an der sogenannten Gleichgewichtskennlinie, die aus unendlich langsamen Prozessen hervorgeht, zum Stillstand kommt. Läge die Kriechspannung oberhalb dieser Kennlinie, so ergäbe sich unbegrenztes Kriechen.

Während des Kriechvorgangs kommt es zu einer Akkumulation der Schädigung in Form von Poren, die sich bevorzugt an Korngrenzen, die senkrecht zur Zugrichtung orientiert sind, ausbilden. Da die Evolutionsgleichung der Schädigung (4.89) proportional zur plastischen Bogenlänge gewählt wurde, entspricht die zeitliche Entwicklung der Schädigung, ebenfalls in Abbildung (6.8) dargestellt, qualitativ dem Verlauf der Kriechkurven. Zu einer deutlichen Zunahme der Schädigungsrate kommt es erst im tertiären Kriechbereich.

6.5 Thermisch beanspruchter Behälter unter Innendruck

Das folgende Beispiel befaßt sich mit dem Versagensverhalten eines thermisch beanspruchten Behälters unter konstantem Innendruck. Es ist durch die beim COMMISSARIAT A L'ENERGIE ATOMIQUE (CEA) durchgeführten RUPATHER-Experimente [27] motiviert. Geometrie und Lastgeschichte ähneln diesen Experimenten, allerdings wurde die Berechnung auf der Basis rein fiktiver Materialdaten durchgeführt. Im Vordergrund steht hierbei der Einfluß der statischen Erholungsterme auf das Verformungsverhalten des Behälters.

Bei der Modellierung des Behälters wurde die Axialsymmetrie und die Symmetrie bezüglich der Mittelebene ausgenutzt. Die geometrischen Abmessungen sowie die Randbedingungen für den Innendruck p und den Wärmestrom q zeigt Abbildung 6.9. Die Ausgangstemperatur θ_i des Behälters betrug 300 K. Der mittlere Teil des Behälters wurde von außen mit einem konstanten Wärmestrom q_1 beaufschlagt, der innerhalb von t_1 Sekunden mit einer konstanten Rate von $10 \text{ W}/(\text{m}^2\text{s})$ aufgebracht wurde. Der Deckel des Behälters wurde auf der konstanten Ausgangstemperatur von 300 K gehalten. Der von außen zugeführte Wärmestrom bewirkt so

⁷Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß es sich beim tertiären Kriechen um einen inhomogenen Prozeß handelt, der korrekterweise mit Hilfe der FEM berechnet werden sollte.

eine maximale Aufheizung von fast 60 K in der Mitte des Behälters. Nach t_2 Sekunden, also unmittelbar vor dem Aufbringen der mechanischen Last, liegt in axialer Richtung eine nahezu lineare Temperaturverteilung vor (siehe Abbildung 6.12 c), während in radialer Richtung der Temperaturgradient vernachlässigbar ist. Anschließend wurde der Innendruck mit einer konstanten Rate von 0.1 MPa/s auf den Wert p_1 erhöht und konstant gehalten. Der FE-Analyse lagen die beiden Datensätze aus Tabelle 6.1 zugrunde.

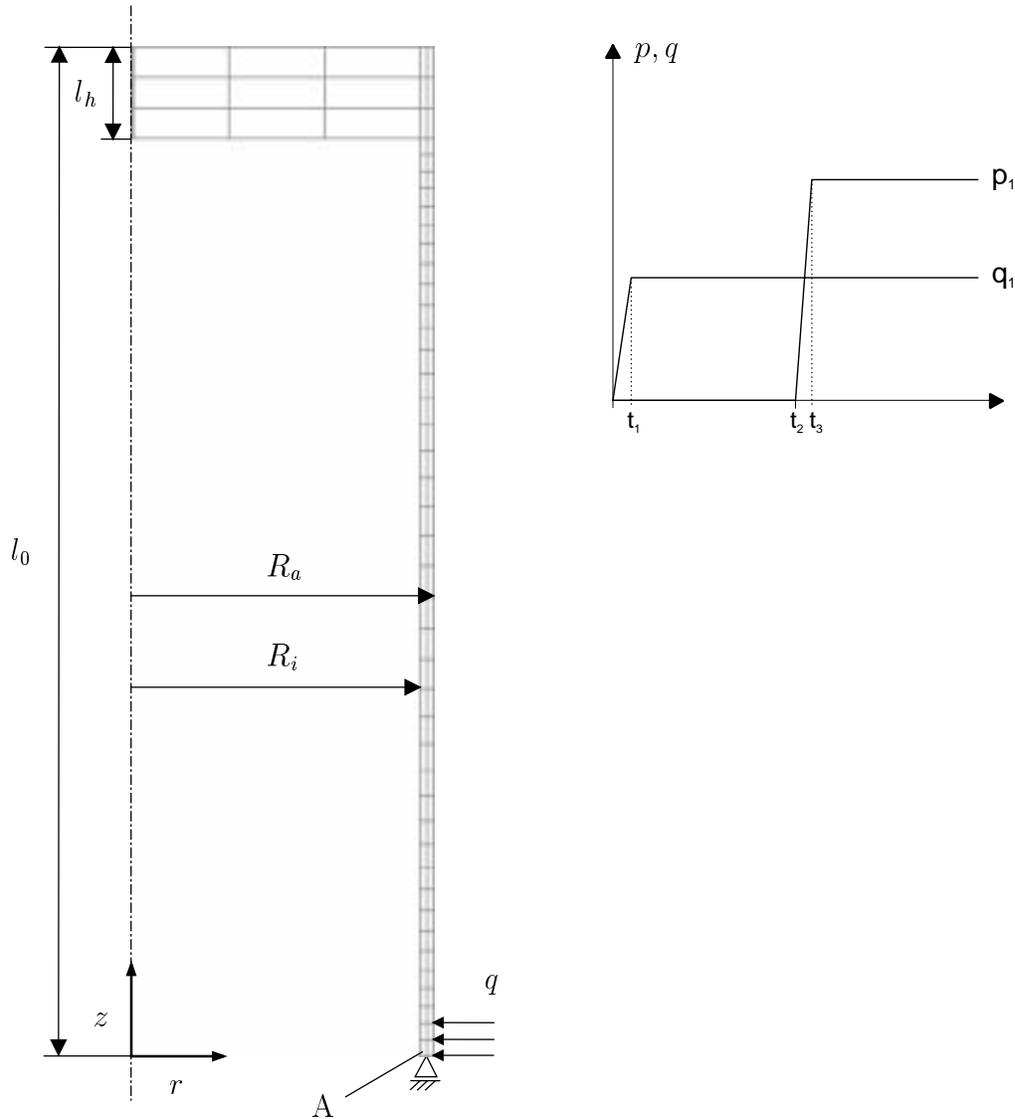


Abb. 6.9: Behältergeometrie und Randbedingungen (links):

$l_0 = 110$ mm, $l_h = 10$ mm, $R_i = 31.5$ mm, $R_a = 33$ mm;

schematische Darstellung der Lastgeschichte (rechts):

$t_1 = 1000$ s, $t_2 = 10000$ s, $t_3 = 10180$ s, $q_1 = 10$ kW/m², $p_1 = 18$ MPa.

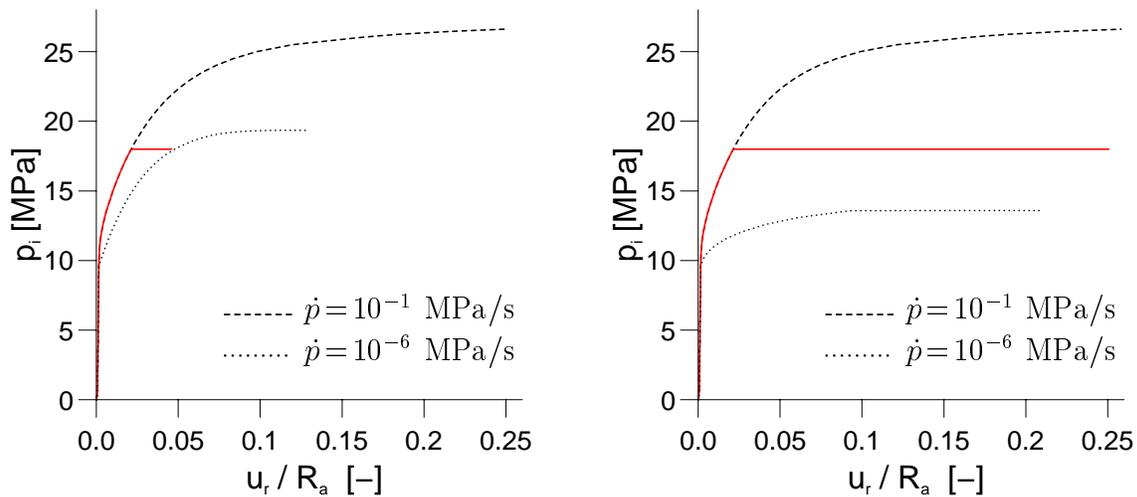


Abb. 6.10: Innendruck p_i in Abhängigkeit von der Radialverschiebung u_r des Knotens mit den Koordinaten $r = R_a$ und $z = 0$, ohne statische Erholung (links), mit statischer Erholung (rechts).

Abbildung 6.10 zeigt den Innendruck in Abhängigkeit von der Radialverschiebung an der Außenseite bei $z = 0$. Im linken Diagramm sind die Ergebnisse der FE-Simulationen dargestellt, bei denen die statischen Erholungsterme unberücksichtigt blieben ($p = \pi = 0$).

Die gestrichelten Kurven beschreiben die berechneten Druck-Verschiebungs-Verläufe bei einer konstanten Belastungsgeschwindigkeit von 0.1 MPa/s. Da in beiden Fällen der maximal ertragbare Innendruck bei etwa 27.3 MPa liegt, ist der Einfluß der statischen Erholungsterme vernachlässigbar klein. Die zu einer Belastungsgeschwindigkeit von 10^{-6} MPa/s gehörenden, punktiert eingezeichneten, Druck-Verschiebungs-Verläufe machen deutlich, daß bei derart kleinen Belastungsgeschwindigkeiten die statischen Erholungsterme einen sehr großen Einfluß auf den maximal ertragbaren Innendruck haben. Ohne statische Erholung (linkes Diagramm in Abbildung 6.10) stellt sich ein maximaler Innendruck von 19.4 MPa ein. Der ermittelte Druck-Verschiebungs-Verlauf entspricht in guter Näherung der Gleichgewichtskennlinie, die aus unendlich langsam ablaufenden Bewegungen hervorgeht. Dies hat für die in Abbildung 6.9 angegebene Lastgeschichte zur Folge, daß der Kriechvorgang an der Gleichgewichtskennlinie zum Stillstand kommt, d.h. plastische Bogenlänge und Schädigung für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen einen Grenzwert streben (siehe hierzu auch Abbildung 6.11). Bei Berücksichtigung der statischen Erholungsterme hingegen (rechtes Diagramm in Abbildung 6.10) fällt der maximal ertragbare Innendruck auf 13.6 MPa ab. Dies führt dazu, daß bei einem Innendruck von 18 MPa unbegrenztes Kriechen stattfindet. Die damit verbundene Verformungs- und Schädigungslokalisierung am Integrationspunkt A ist in Abbildung 6.11 dargestellt.

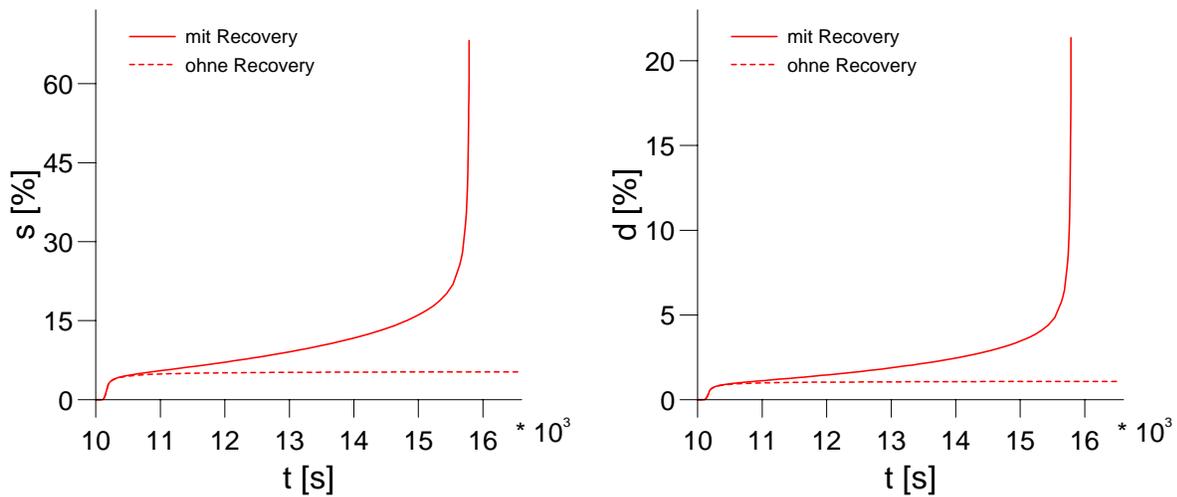


Abb. 6.11: Zeitlicher Verlauf der plastischen Bogenlänge s und der Schädigung d am Integrationspunkt A (in Abb. 6.9 eingezeichnet) für die in Abbildung 6.9 dargestellte Lastgeschichte.

Abbildung 6.12 zeigt den Verlauf der plastischen Bogenlänge, der Schädigung und der Temperatur in axialer Richtung in Abhängigkeit von der Zeit. Auf eine entsprechende Darstellung in radialer Richtung wird verzichtet, da diese Größen annähernd konstant über den Radius sind. Die Ergebnisse sind an den Integrationspunkten dargestellt und über der undeformierten Struktur aufgetragen. Die Diagramme auf der linken Seite zeigen die Ergebnisse der FE-Simulation ohne statische Erholung, die Diagramme auf der rechten Seite die Ergebnisse mit statischer Erholung für die in Abbildung 6.9 dargestellte Lastgeschichte.

Wie erwartet, tritt in beiden Fällen die maximale plastische Bogenlänge und somit auch die maximale Schädigung in der Mitte des Behälters auf. Ein deutlicher Zuwachs dieser beiden Größen während des Kriechvorgangs ist allerdings nur bei Berücksichtigung der statischen Erholungsterme zu verzeichnen. Die damit verbundene Verformungslokalisierung hat, wie in Abbildung 6.13 (rechts) dargestellt, ein Ausbeulen des Behälters zur Folge. Bleiben hingegen die statischen Erholungsterme unberücksichtigt, so strebt der Verlauf der plastischen Bogenlänge und somit auch der Schädigung für $t \rightarrow \infty$ gegen eine Grenzkurve. Diese ist, wie aus den Abbildungen 6.12 a) und b) hervorgeht, nach 15790 s bereits in guter Näherung erreicht. Die zugehörige deformierte Struktur zeigt Abbildung 6.13 (links).

Die Temperaturentwicklung geht aus Abbildung 6.12 c) hervor. Wie bereits zu Beginn erwähnt, bewirkt der von außen zugeführte Wärmestrom zunächst eine maximale Aufheizung von fast 60 K im mittleren Teil des Behälters. Aufgrund der thermomechanischen Kopplung kommt es im weiteren Verlauf zu einem erneuten Temperaturanstieg. Ohne statische Erholung nimmt die Temperatur im mittleren Teil des Behälters jedoch lediglich um 3 K zu, während mit statischer Erholung eine Temperaturzunahme von 72 K zu verzeichnen ist.

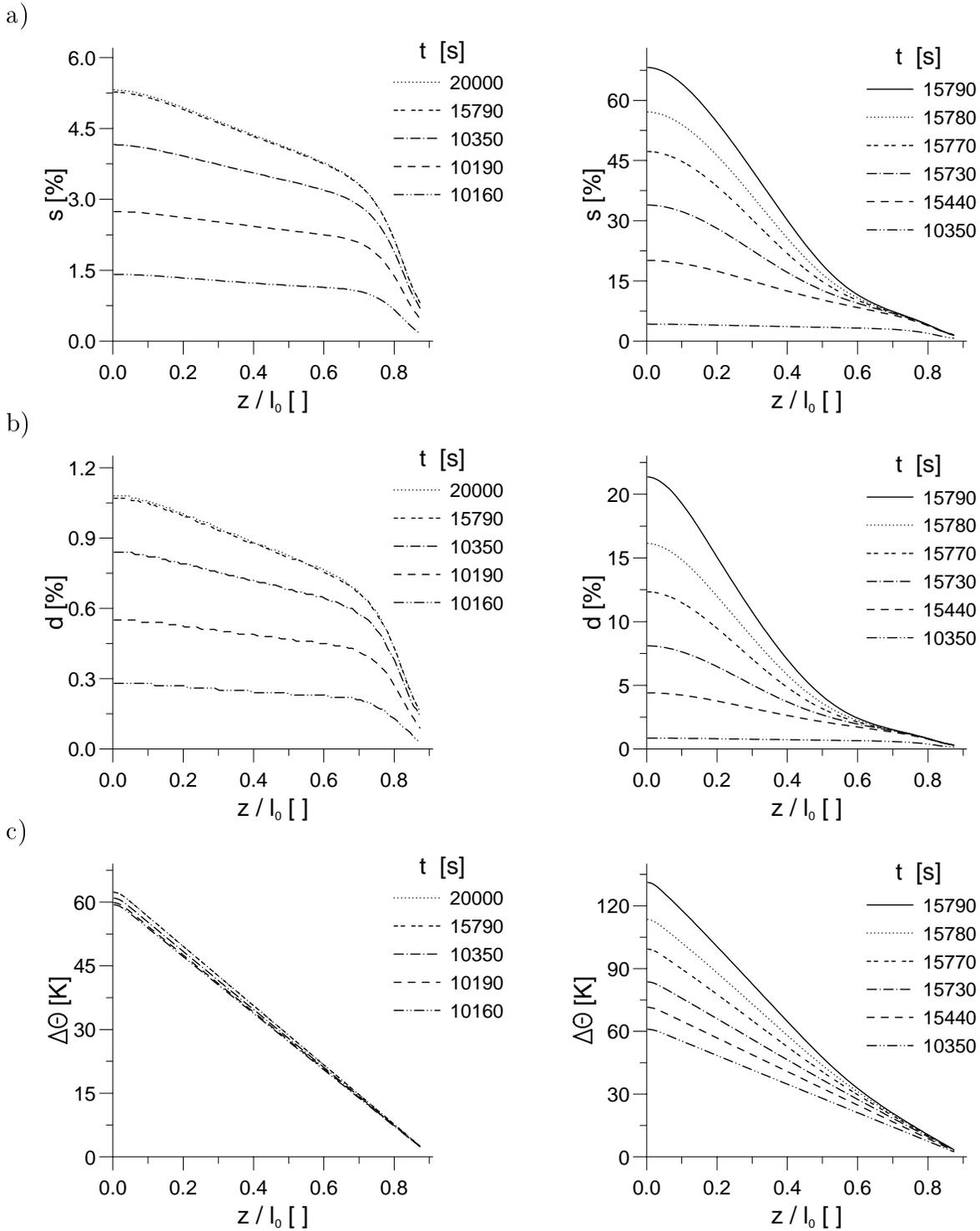


Abb. 6.12: Plastische Bogenlänge s , Schädigungsvariable d und Temperaturdifferenz $\Delta\theta = \theta - \theta_i$ in Abhängigkeit von z an der Behälterinnenseite für unterschiedliche Zeitpunkte, ohne statische Erholung (links), mit statischer Erholung (rechts).

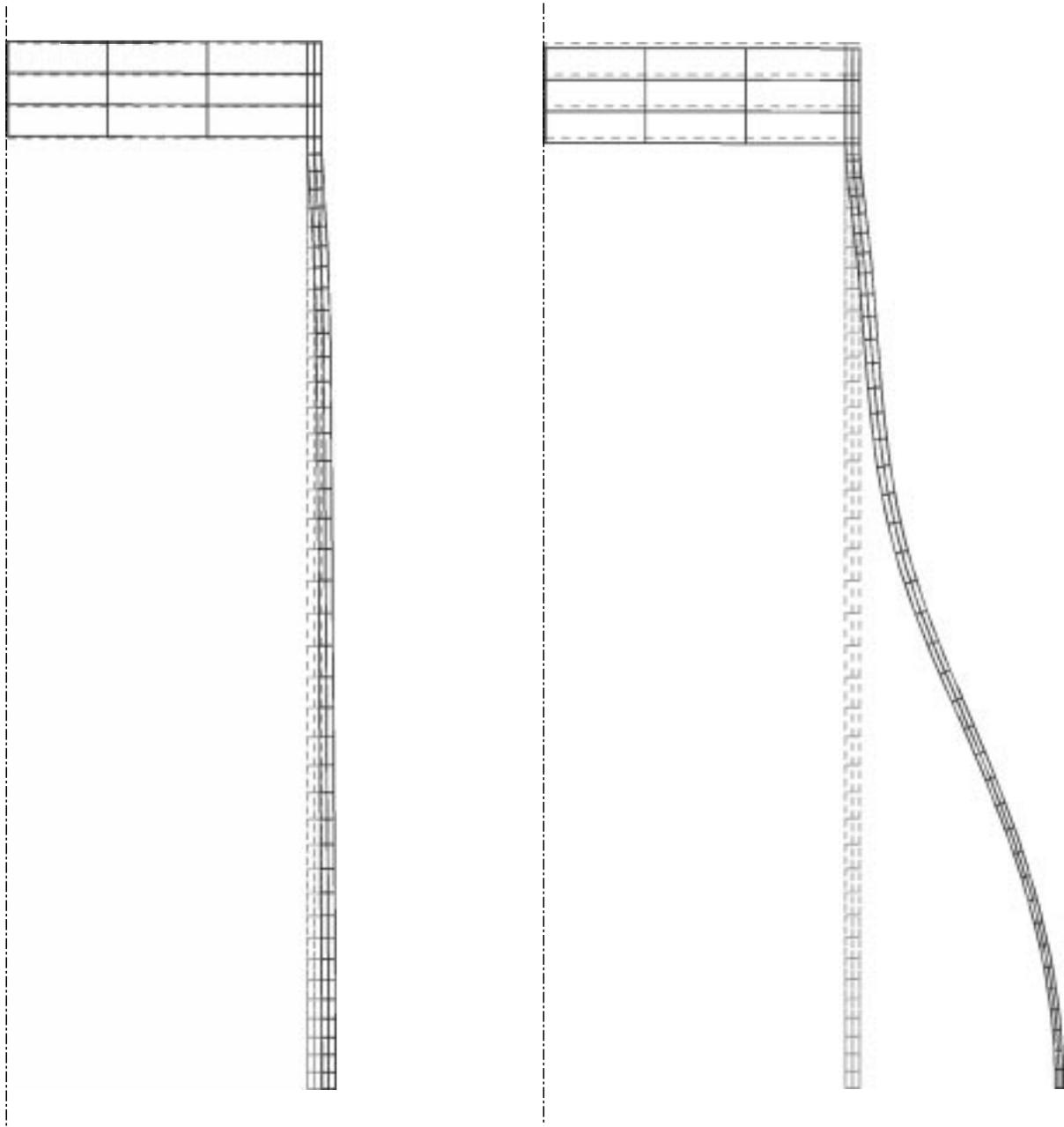


Abb. 6.13: Deformierte Struktur nach $t = 15790$ s, ohne statische Erholung (links), mit statischer Erholung (rechts).

7 Zusammenfassung

Auf der Basis des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik in Form der *Clausius-Duhem-Ungleichung* wurde ein thermodynamisch konsistentes Materialmodell der finiten Thermo-viskoplastizität mit Schädigung formuliert. Die Beschreibung des Verhaltens der isotropen und der kinematischen Verfestigung erfolgt mit Hilfe von inneren Variablen, deren Evolutionsgleichungen neben einem Produktions- und Begrenzungsterm auch einen statischen Erholungsterm beinhalten. Für eine vereinfachte Version dieses Modells wurde eine Materialroutine entwickelt und mittels der Schnittstelle UMAT in das Finite Elemente Programm ABAQUS implementiert.

Ausgehend von einer rein mechanischen Formulierung wurde eine Möglichkeit aufgezeigt, Materialmodelle mit isotroper Schädigung in thermodynamisch konsistenter Weise von kleinen auf große Deformationen zu verallgemeinern. Die Kopplung zwischen Verformungsmodell und Schädigung erfolgte über das *Konzept der effektiven Spannung* zusammen mit dem *Prinzip der Dehnungsäquivalenz*. Im Rahmen dieser Arbeit wurden zunächst drei für kleine Deformationen formulierte, thermodynamisch konsistente Plastizitätsmodelle mit Schädigung betrachtet, die nichtlineare isotrope und kinematische Verfestigung aufweisen. Zwei der Modelle entstammen der Literatur (LEMAITRE ([61], S.50f) bzw. BENALLAL ET AL. [4]), das dritte ist ein neuentwickeltes Modell namens Modell B. Die Entwicklungsgleichung für die Schädigung stellt eine verallgemeinerte Form einer erstmals von DHAR ET AL. [28] formulierten Evolutionsgleichung für duktile Schädigung dar, die sowohl Porenbildung als auch Porenwachstum zu beschreiben vermag. Als Sonderfälle beinhaltet sie weiterhin Ansätze von LEMAITRE [59, 60] und TAI & YANG [92]. Die drei Modelle unterscheiden sich im wesentlichen in der Definition der Fließfunktion und den Evolutionsgleichungen für die isotrope und kinematische Verfestigung. Ihre charakteristischen Eigenschaften wurden am Beispiel einer einachsigen Zugbeanspruchung demonstriert. Eine Eigenart des Modells von BENALLAL ET AL. ist, daß die Cauchy-Spannung mit zunehmender Schädigung nicht gegen Null strebt, wie es bei den beiden anderen Modellen der Fall ist, sondern gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert. Bei Modell B hingegen wurden sämtliche Spannungen durch effektive Spannungen ersetzt. Dies hat zur Folge, daß auch die plastischen inneren Variablen, die die isotrope und die kinematische Verfestigung beschreiben, mit zunehmender Schädigung verschwinden.

Die Verallgemeinerung dieser drei Materialmodelle auf große Deformationen basiert auf einer multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen inelastischen Anteil sowie auf dem *Konzept der dualen Variablen und Ableitungen* [38, 95]. Bedingt durch die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten wird eine fiktive, spannungsfreie Zwischenkonfiguration definiert. Die zunächst bezüglich dieser Zwischenkonfiguration for-

mulierten Materialgleichungen unterliegen einer speziellen thermodynamischen Formulierung, die auf TSAKMAKIS [97] zurückgeht. Die Besonderheit hierbei liegt einerseits in der Wahl der Spannungs- und Verzerrungstensoren sowie den zugehörigen objektiven Zeitableitungen, andererseits in der Modellierung der kinematischen Verfestigung. Es wird ein Translationsensor der kinematischen Verfestigung eingeführt, der die Struktur eines *Mandel'schen Spannungstensors* besitzt. Allerdings wird die Evolutionsgleichung der kinematischen Verfestigung nicht mit diesem Translationstensor formuliert, sondern mit einem inneren Spannungstensor, der die Struktur eines *zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensors der plastischen Zwischenkonfiguration* besitzt. Der Translationstensor seinerseits ist durch eine nichtlineare Funktion dieses inneren Spannungstensors bestimmt. Die konstitutiven Gleichungen wurden so formuliert, daß der zweite Hauptsatz der Thermodynamik in Form der Clausius-Duhem-Ungleichung stets erfüllt ist. Am Beispiel einer einachsigen Zugbeanspruchung wurde gezeigt, daß die im Rahmen dieser Theorie auf große Deformationen verallgemeinerten Modelle von LEMAITRE und BENALLAL ET AL. kein plausibles Materialverhalten aufweisen. Bei beiden Modellen strebt die Cauchy-Spannung mit zunehmender Schädigung gegen einen von Null verschiedenen Grenzwert. Bei kleinen Deformationen war dies nur beim Modell von BENALLAL ET AL. der Fall. Lediglich das auf große Deformationen verallgemeinerte Modell B zeigt ein ähnliches Spannungs-Dehnungs-Verhalten wie bei kleinen Deformationen. Im Hinblick auf eine effiziente numerische Umsetzung wurde anschließend eine vereinfachte kinematische Verfestigungsregel angenommen und deren Verträglichkeit mit der Clausius-Duhem-Ungleichung überprüft. Die daraus abgeleiteten Restriktionen erschienen weiterhin nur im Fall von Modell B zulässig. Ferner wurden kleine elastische Verzerrungen vorausgesetzt, so daß die Struktur der in der Zwischenkonfiguration formulierten Materialgleichungen bei einer Vorwärtsrotation in die Momentankonfiguration erhalten bleibt. Da ABAQUS eine Integration der konstitutiven Gleichungen mit dem HUGHES-WINGET-Verfahren nahelegt, wurde die Hyperelastizitätsbeziehung durch eine Hypoelastizitätsbeziehung approximiert.

Anschließend wurde Modell B in thermodynamisch konsistenter Weise auf Thermoviskoplastizität erweitert. In den Evolutionsgleichungen der kinematischen und isotropen Verfestigung wurden zusätzlich statische Erholungsterme berücksichtigt. Unter der Voraussetzung einer vereinfachten kinematischen Verfestigungsregel sowie kleiner thermoelastischer Verzerrungen konnten die konstitutiven Gleichungen vereinfacht werden.

Die so gewonnene vereinfachte Version des Thermoviskoplastizitätsmodells wurde in das Finite Elemente Programm ABAQUS implementiert. Die Integration der konstitutiven Gleichungen beruht auf dem HUGHES-WINGET-Algorithmus, der die quadratische Konvergenz des Newton-Verfahrens während der Gleichgewichtsiteration gewährleistet. Das System der konstitutiven Gleichungen wurde mit Hilfe eines *Operator-Split*-Verfahrens integriert. Es wurde ein dreifacher Operator-Split durchgeführt, wobei Operator I die thermoelastischen Anteile, Operator II die inelastischen Anteile einschließlich Schädigung und Operator III die statischen Erholungsterme beinhaltet. Der thermoelastische Anteil wurde mit dem HUGHES-WINGET-

Verfahren integriert. Hierzu wurden zunächst das Hypoelastizitätsgesetz und die tensoriellen Evolutionsgleichungen mit Jaumann-Ableitungen formuliert und mit Hilfe der sogenannten *bar-Transformation* in gewöhnliche Differentialgleichungen überführt. Das daraus resultierende Differentialgleichungssystem wurde mit der Mittelpunktsregel integriert. Die Integration in den Operatoren II und III wurde mit einem impliziten Euler-Verfahren durchgeführt. Die spezielle Struktur des Materialmodells ermöglichte eine Reduktion der zu lösenden Gleichungen von 15 auf 2 nichtlineare Gleichungen in Operator II und von 7 auf 2 nichtlineare Gleichungen in Operator III. Im Falle der Thermoplastizität entfällt Operator III, da die statischen Erholungsterme nur bei zeitabhängigem Materialverhalten berücksichtigt werden. Im Hinblick auf die Effizienz des hier vorgestellten Spannungsalgorithmus wurden die konstitutiven Beiträge zur Tangentensteifigkeitsmatrix analytisch ermittelt.

Abschließend wurden einige Anwendungsbeispiele für verschiebungs- und kraftgesteuerte Prozesse vorgestellt. Die Verifikation des Spannungsalgorithmus erfolgte anhand einer verschiebungsgesteuerten zyklischen Belastung. Als weiteres Beispiel wurde der Einschnürungsvorgang einer axialsymmetrischen Zugprobe simuliert. Infolge der dissipativen Vorgänge und der thermischen Randbedingungen stellt sich eine inhomogene Temperaturverteilung in der Probe ein, die im Falle temperaturabhängiger Materialparameter zu einer Einschnürung führt. Der Einfluß der Materialparameter der statischen Erholung wurde anhand einer einachsigen Kriechbeanspruchung verdeutlicht. Weiterhin wurde am Beispiel eines thermisch beaufschlagten, dünnwandigen Zylinders unter konstantem Innendruck gezeigt, daß die statischen Erholungsterme das Verformungsverhalten maßgeblich beeinflussen können.

Literaturverzeichnis

- [1] AKTAA, J.: *Kontinuumsmechanische Modellierung der zeitabhängigen Schädigung bei hohen Temperaturen*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), (1994).
- [2] AMAR, G. and J. DUFALLY: *Identification and validation of viscoplastic and damage constitutive equations*. Eur. J. Mech., A/Solids, 12, 197–218, (1993).
- [3] BATHE, K.J.: *Finite element procedures in engineering analysis*. PRENTICE–HALL, INC., Englewood Cliffs, New Jersey, (1982).
- [4] BENALLAL, A., R. BILLARDON, and I. DOGHRI: *An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations*. Communications in Applied Numerical Methods, 4, 731–740, (1988).
- [5] BENALLAL, A., R. BILLARDON, and J. LEMAITRE: *Continuum damage mechanics and local approach to fracture: Numerical procedures*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 92, 141–155, (1991).
- [6] BENNANI, B., P. PICART, and J. OUDIN: *Finite element computation of isotropic and elasto-plastic problems with damage occurrence*. In OWEN, W., E. ONATE, and E. HINTON (editors): *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, pages 1443–1454, Pineridge Press, Swansea, U.K., (1992).
- [7] BILLARDON, R. and L. MORET-BAILLY: *Fully coupled strain and damage finite element analysis of ductile fracture*. Nuclear Eng. Design, 105, 43–49, (1987).
- [8] BRUHNS, O.T.: *A continuum damage theory for high strain rate deformations of metals with application to the impact problem*. In MASAHIRO, J. and I. TATSUO (editors): *Mechanical Behaviour of Materials-VI*, pages 499–506, Pergamon Press, (1991).
- [9] CHABOCHE, J.L.: *Continuous damage mechanics - a tool to describe phenomena before crack initiation*. Nuclear Eng. Design, 64, 233–247, (1981).
- [10] CHABOCHE, J.L.: *Anisotropic creep damage in the framework of continuum damage mechanics*. Nuclear Eng. Design, 79, 309–319, (1984).

- [11] CHABOCHE, J.L.: *Continuum damage mechanics: Present state and future trends*. Nuclear Eng. Design, 105, 19–33, (1987).
- [12] CHABOCHE, J.L.: *Continuum damage mechanics: Part I – general concepts*. J. Appl. Mech., 55, 59–64, (1988).
- [13] CHABOCHE, J.L.: *Continuum damage mechanics: Part II – damage growth, crack initiation and crack growth*. J. Appl. Mech., 55, 65–72, (1988).
- [14] CHABOCHE, J.L.: *Cyclic viscoplastic constitutive equations, part I: A thermodynamically consistent formulation*. J. Appl. Mech., 60, 813–821, (1993).
- [15] CHABOCHE, J.L.: *Cyclic viscoplastic constitutive equations, part II: Stored energy – comparison between models and experiments*. J. Appl. Mech., 60, 822–828, (1993).
- [16] CHABOCHE, J.L.: *Development of continuum damage mechanics for elastic solids sustaining anisotropic and unilateral damage*. Int. J. Damage Mechanics, 2, 311–329, (1993).
- [17] CHABOCHE, J.L. and G. CAILLETAUD: *Integration methods for complex plastic constitutive equations*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 133, 125–155, (1996).
- [18] CHABOCHE, J.L. and P.M. LESNE: *A non-linear continuous fatigue damage model*. Fatigue Frac. Eng. Mat. Struct., 11, 1–17, (1988).
- [19] CHRYSOCHOOS, A.: *Bilan énergétique en élastoplasticité grandes déformations*. J. Mécanique Théorique et Appliquée, 4, (1985).
- [20] CHRYSOCHOOS, A., O. MAISONNEUVE, G. MARTIN, H. CAUMON, and J.C. CHEZEAUX: *Plastic and dissipated work and stored energy*. Nuclear Eng. Design, 114, 323–333, (1989).
- [21] CHULYA, A. and K.P. WALKER: *A new uniformly valid asymptotic integration algorithm for elasto-plastic creep and unified viscoplastic theories including continuum damage*. Int. J. Num. Meth. Eng., 32, 385–418, (1991).
- [22] COCKS, A.C.F. and M.F. ASHBY: *On creep fracture by void growth*. Progress in Materials Science, 27, 189–244, (1982).
- [23] COCKS, A.C.F. and F.A. LECKIE: *Creep constitutive equations for damaged materials*. Advances in Applied Mechanics, 25, 239–294, (1987).
- [24] COLEMAN, B.D. and M.E. GURTIN: *Thermodynamics with internal state variables*. J.Chem.Phys., 47, 597–613, (1967).

- [25] COMBESCURE, A. and Y. JIAJU: *Finite element method for large displacement and large strain elasto-plastic analysis of shell structures and some application of damage mechanics*. Eng. Fract. Mech., 36, 219–231, (1990).
- [26] DE BOER, R.: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, (1982).
- [27] DEVOS, J., PH. MONGABURE, C. SAINTE CATHERINE, and C. STRUB: *RUP THER: A programme devoted to modelling the failure of the RPV lower head*. ASME PVP Conference Montreal, Juli 21–26, 1996, pages 153–160.
- [28] DHAR, S., R. SETHURAMAN, and P.M. DIXIT: *A continuum damage mechanics model for void growth and micro crack initiation*. Eng. Fract. Mech., 53, 917–928, (1996).
- [29] DIEGELE, E., W. JAN SOHN, and CH. TSAKMAKIS: *Integration of finite deformation plasticity and viscoplasticity laws exhibiting nonlinear hardening rules*. (erscheint in Int. J. Num. Meth. Eng.).
- [30] DIEGELE, E., W. JAN SOHN, and CH. TSAKMAKIS: *Viscoplasticity using dual variables*. In SOTTOS, N.R. (editor): *Proceedings of the ASME Materials Division*, volume 1, pages 449–467, New York, N.Y.:ASME, (1995).
- [31] DUFAILY, J. and J. LEMAITRE: *Modeling very low cycle fatigue*. Int. J. Damage Mechanics, 4, 153–170, (1995).
- [32] FLEIG, T.: *Lebensdaueranalyse unter Berücksichtigung viskoplastischer Verformung und Schädigung mit der Methode der finiten Elemente*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), (1996).
- [33] GELIN, J.C. and A. MRICHCHA: *Computational procedures for finite strain elasto plasticity with isotropic damage*. In OWEN, W., E. ONATE, and E. HINTON (editors): *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, pages 1401–1412, Pineridge Press, Swansea, U.K., (1992).
- [34] GREEN, A.E. and P.M. NAGHDI: *Some remarks on elastic–plastic deformations at finite strains*. Int. J. Eng. Sci., 9, 1219–1229, (1971).
- [35] HARTMANN, S.: *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität: Ein Finite-Elemente-Konzept für nichtlineare kinematische Verfestigung bei kleinen und finiten Verzerrungen*. Dissertation, Universität Gesamthochschule Kassel, (1993).
- [36] HARTMANN, S., G. LÜHRS, and P. HAUPT: *On stress algorithms in viscoplasticity and plasticity*. Int. J. Num. Meth. Eng. (submitted for publication).

- [37] HAUPT, P.: *Foundation of continuum mechanics*. Lecture to be given at the IUTAM International Sommer School on Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics, Udine, June 22-26, 1992.
- [38] HAUPT, P. and CH. TSAKMAKIS: *On the application of dual variables in continuum mechanics*. Continuum Mech. Thermodyn., 1, 165–196, (1989).
- [39] HAYHURST, D.R.: *Creep rupture under multiaxial states of stress*. J. Mech. Phys. Solids, 20, 381–390, (1972).
- [40] HIBBIT, KARLSSON & SORENSEN: *ABAQUS theory, version 5.2*.
- [41] HIBBIT, KARLSSON & SORENSEN: *ABAQUS user's manual version, 5.2*.
- [42] HORNBERGER, K.: *Anwendung Viskoplastischer Stoffgesetze in Finite Element Programmen*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), (1988).
- [43] HORNBERGER, K. and H. STAMM: *An implicit integration algorithm with a projection method for viscoplastic constitutive equations*. Int. J. Num. Meth. Eng., 28, 2397–2421, (1989).
- [44] HUGHES, T.J.R. and J. WINGET: *Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng., 15, 1862–1867, (1980).
- [45] JANSOHN, W.: *Formulierung und Integration von Stoffgesetzen zur Beschreibung großer Deformationen in der Thermoplastizität und -viskoplastizität*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), (1996).
- [46] JU, J.W.: *On energy-based coupled elastoplasticity damage theories: Constitutive modeling and computational aspects*. Int. J. Solids Structures, 25, 803–833, (1989).
- [47] KACHANOV, L.M.: *On the time to failure under creep conditions*. Izv. Akad. Nauk. SSR, pages 26–31, (1958).
- [48] KAMLAH, M.: *Zur Modellierung des Verfestigungsverhaltens von Materialien mit statischer Hysterese im Rahmen der phänomenologischen Thermodynamik*. Dissertation, Universität Gesamthochschule Kassel, (1994).
- [49] KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. BI-Wissenschaftsverlag, (1989).
- [50] KRATOCHVIL, J. and O.W. DILLON: *Thermodynamics of elastic-plastic materials as a theory with internal state variables*. J. Appl. Phys., 40, 3207–3218, (1969).

- [51] KRUCH, S., J.L. CHABOCHE, and P.M. LESNE: *A new damage approach for creep crack growth prediction*. In ZYCKOWSKI, M. (editor): *Creep in Structures*, IUTAM Symposium Cracow/Poland, Sept. 10–14, 1990, pages 355–362, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg, (1991).
- [52] LÄMMER, H., B. RITTER und CH. TSAKMAKIS: *Diskussion plastischer Instabilitäten eines Druckbehälters mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente*. KfK-Bericht 5362, Kernforschungszentrum Karlsruhe, (1994).
- [53] LÄMMER, H., B. RITTER und CH. TSAKMAKIS: *Thermodynamisch konsistente, finite Thermoviskoplastizität mit Schädigung*. In MÜHL, B. (Herausgeber): *Projekt Nukleare Sicherheitsforschung - Jahresbericht 1996*, Seiten 161–182, FZKA-Bericht 5963, Forschungszentrum Karlsruhe, (1997).
- [54] LECKIE, F.A.: *The micro- and macromechanics of creep rupture*. Eng. Fract. Mech., 25, 505–521, (1986).
- [55] LEHMANN, TH. and U. BLIX: *On the coupled thermo-mechanical process in the necking problem*. Int. J. Plasticity, 1, 175–188, (1985).
- [56] LEMAITRE, J.: *How to use damage mechanics*. Nuclear Eng. Design, 80, 233–245, (1984).
- [57] LEMAITRE, J.: *A continuous damage mechanics model for ductile fracture*. J. Eng. Mat. Tech., 107, 83–89, (1985).
- [58] LEMAITRE, J.: *Coupled elasto-plasticity and damage constitutive equations*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 51, 31–49, (1985).
- [59] LEMAITRE, J.: *Formulation and identification of damage kinetic constitutive relations*. In KRAJCIKOVIC, D. and J. LEMAITRE (editors): *Continuum Damage Mechanics, Theory and Applications*, pages 37–89, Springer-Verlag Wien/New York, (1987).
- [60] LEMAITRE, J.: *Formulation unifiée des lois d'évolution d'endommagement*. C. R. Acad. Sci. Paris, Série II, pages 1125–1130, (1987).
- [61] LEMAITRE, J.: *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York, (1992).
- [62] LEMAITRE, J. and J.L. CHABOCHE: *Mechanics of Solid Materials*. Cambridge University Press, (1990).
- [63] LEMAITRE, J. and I. DOGHRI: *Damage 90: A post processor for crack initiation*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 115, 197–232, (1994).

- [64] LEMAITRE, J. and D. MARQUIS: *Modelling elasto-plasticity, damage and ageing as coupled behaviours in engineering materials*. In TOOTH, A.S. and J. SPENCE (editors): *Applied Solid Mechanics-2*, pages 277–302, (1988).
- [65] LEMAITRE, J. and D. MARQUIS: *Modeling complex behavior of metals by the "state-kinetic coupling theory"*. J. Eng. Mat. Tech., 114, 250–254, (1992).
- [66] LEMAITRE, J. and A. PLUMTREE: *Application of damage concepts to predict creep-fatigue failures*. J. Eng. Mat. Tech., 101, 284–292, (1979).
- [67] LE ROY, G., J.D. EMBURY, G. EDWARD, and M.F. ASHBY: *A model of ductile fracture based on the nucleation and growth of voids*. Acta Metall., 29, 1509–1522, (1981).
- [68] LUBARDA, V.A.: *An analysis of large-strain damage elastoplasticity*. Int. J. Solids Structures, 31, 2951–2964, (1994).
- [69] LUBARDA, V.A. and D. KRAJCIKOVIC: *Some fundamental issues in rate theory of damage-elastoplasticity*. Int. J. Plasticity, 11, 763–797, (1995).
- [70] MARQUIS, D. and J. LEMAITRE: *Constitutive equations for the coupling between elasto-plasticity damage and ageing*. Revue Phys. Appl., 23, 615–624, (1988).
- [71] MCCLINTOCK, F.A.: *A criterion for ductile fracture by the growth of holes*. J. Appl. Mech., 35, 363–371, (1968).
- [72] MIEHE, C.: *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und Numerische Integration*. Habilitation, Universität Hannover, (1992).
- [73] MUDRY, F.: *Methodology and applications of local criteria for the prediction of ductile tearing*. In LARSON, L.H. (editor): *Elastic-Plastic Fracture Mechanics*, pages 263–283, (1985).
- [74] MURAKAMI, S.: *Notation of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory*. J. Eng. Mat. Tech., 105, 99–105, (1983).
- [75] MURAKAMI, S. and N. OHNO: *A continuum theory of creep and creep damage*. In PONTNER, A.R.S. and D.R. HAYHURST (editors): *Creep in Structures*, IUTAM Symposium Leicester/U.K., Sept. 8–12, 1980, pages 422–443, Springer-Verlag Berlin, (1981).
- [76] NAGDEGAAL, J.C. and F.E. VELDPAUS: *On the implementation of finite strain plasticity equations in a numerical model*. In PITTMANN, J.F.T., O.C. ZIENKIEWICZ, R.D. WOOD, and J.M. ALEXANDER (editors): *Numerical Analysis of Forming Processes*, John Wiley & Sons Ltd., (1984).
- [77] NEEDLEMAN, A. and V. TVERGAARD: *Mesh effects in the analysis of dynamic ductile crack growth*. Eng. Fract. Mech., 47, 75–91, (1994).

- [78] RABOTNOV, Y.N.: *Creep rupture*. In HETENYI, M. and W.G. VINCENTI (editors): *Applied Mechanics*, pages 342–349, (1968).
- [79] RICE, J.R. and D.M. TRACEY: *On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields*. *J. Mech. Phys. Solids*, 17, 201–217, (1969).
- [80] RITTER, B.: *Finite Elemente Simulationen zur Auswirkung von Imperfektionen auf das Versagensverhalten elastisch-plastischer Druckbehälter*. Dissertation, Universität Karlsruhe (TH), (1996).
- [81] ROUSSELIER, G.: *Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage*. In NEMAT-NASSER, S. (editor): *Three-Dimensional Constitutive Relations and Ductile Fracture*, pages 331–355, North-Holland Publishing Company, (1981).
- [82] ROUSSELIER, G.: *Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture*. *Nuclear Eng. Design*, 105, 97–111, (1987).
- [83] ROUSSELIER, G., J.C. DEVAUX, G. MOTTET, and G. DEVESA: *A methodology for ductile fracture analysis based on damage mechanics: An illustration of a local approach of fracture*. In LANDES, D.J., A. SAXENA, and J.G. MERKLE (editors): *Nonlinear Fracture Mechanics: Volume II- Elastic Plastic Fracture*, pages 332–354. ASTM, (1989).
- [84] SIMO, J.C. and J.W. JU: *Strain- and stress-based continuum damage models – I. Formulation*. *Int. J. Solids Structures*, 23, 821–840, (1987).
- [85] SIMO, J.C. and J.W. JU: *Strain- and stress-based continuum damage models – II. Computational aspects*. *Int. J. Solids Structures*, 23, 841–869, (1987).
- [86] SIMO, J.C., J.W. JU, R.L. TAYLOR, and K.S. PISTER: *On strain-based continuum damage models: Formulation and computational aspects*. In DESAI, C.S., E. KREMPL, P.D. KIOUSIS, and T. KUNDU (editors): *Constitutive Laws For Engineering Materials: Theory and Applications*, pages 233–245, Elsevier Science Publishing Co. New York, (1987).
- [87] SIMO, J.C. and C. MIEHE: *Associative coupled thermoplasticity at finite strains: Formulation, numerical analysis and implementation*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 98, 41–104, (1992).
- [88] SIMO, J.C. and R.L. TAYLOR: *Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 48, 101–118, (1985).
- [89] SOUZA NETO, A.E. DE, D. PERIC, and D.R.J. OWEN: *A computational model for ductile damage at finite strains*. In OWEN, W., E. ONATE, and E. HINTON (editors): *Computational Plasticity: Fundamentals and Applications*, pages 1425–1441, Pineridge Press, Swansea, U.K., (1992).

- [90] SOUZA NETO, E.A. DE and D. PERIC: *A computational framework for a class of fully coupled models for elastoplastic damage at finite strains with reference to the linearization aspects*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 130, 179–193, (1996).
- [91] STEINMANN, P., C. MIEHE, and E. STEIN: *Comparison of different finite deformation inelastic damage models within multiplicative elastoplasticity for ductile materials*. *Computational Mechanics*, 13, 458–474, (1994).
- [92] TAI, W.H. and B.X. YANG: *A new microvoid-damage model for ductile fracture*. *Eng. Fract. Mech.*, 25, 377–384, (1986).
- [93] TIE-JUN, W.: *Unified CDM model and local criterion for ductile fracture-I. Unified CDM model for ductile fracture*. *Eng. Fract. Mech.*, 42, 177–183, (1992).
- [94] TRAMPCZYNSKI, W.A. and D.R. HAYHURST: *Creep deformation and rupture under non-proportional loading*. In PONTER, A.R.S. and D.R. HAYHURST (editors): *Creep in Structures*, pages 388–405, IUTAM Symposium Leicester/U.K., Sept. 8–12, 1980, pages 422–443, Springer-Verlag Berlin, (1981).
- [95] TSAKMAKIS, CH.: *Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer inelastischer Deformationen*. Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt, (1987).
- [96] TSAKMAKIS, CH.: *Methoden zur Darstellung inelastischen Materialverhaltens bei kleinen Deformationen*. Habilitation, Universität Gesamthochschule Kassel, (1994).
- [97] TSAKMAKIS, CH.: *Kinematic hardening rules in finite plasticity part I: A constitutive approach*. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 8, 213–231, (1996).
- [98] TSAKMAKIS, CH.: *Kinematic hardening rules in finite plasticity part II: Some examples*. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 8, 233–246, (1996).
- [99] TVERGAARD, V. and A. NEEDLEMAN: *An analysis of the brittle-ductile transition in dynamic crack growth*. *Int. J. Frac.*, 59, 53–67, (1993).
- [100] VOYIADJIS, G.Z. and T. PARK: *Anisotropic damage for the characterization of the onset of macro-crack initiation in metals*. *Int. J. Damage Mechanics*, 5, 68–92, (1996).
- [101] WEBER, G.G.A.: *Computational procedures for a new class of finite deformation elastic-plastic constitutive equations*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, (1988).
- [102] ZIENKIEWIC, O.C.: *The finite element method*. McGRAW-HILL Book Company (UK), (1977).

A Duale Variablen und Ableitungen

A.1 Familie 1: Zerlegung der Verzerrungstensoren

\mathbb{R}_R		\mathbb{R}_t
$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$ $\mathbf{E}_{et} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p)$ $\mathbf{E}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p - \mathbf{1})$ $\mathbf{E} = \mathbf{E}_{et} + \mathbf{E}_p$	$\xrightarrow{\mathbf{F}^{T-1}(\cdot)\mathbf{F}^{-1}}$	$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1})$ $\mathbf{A}_{et} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}_{et}^{T-1} \mathbf{F}_{et}^{-1})$ $\mathbf{A}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{et}^{T-1} \mathbf{F}_{et}^{-1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1})$ $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{et} + \mathbf{A}_p$
$\mathbf{F}_p^{T-1}(\cdot)\mathbf{F}_p^{-1} \downarrow$		$\uparrow \mathbf{F}_{et}^{T-1}(\cdot)\mathbf{F}_{et}^{-1}$
$\hat{\mathbb{R}}_t$		$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{et}^T \mathbf{F}_{et} - \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{F}_p^{-1})$ $\hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{et}^T \mathbf{F}_{et} - \mathbf{1})$ $\hat{\mathbf{\Gamma}}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}_p^{T-1} \mathbf{F}_p^{-1})$ $\hat{\mathbf{\Gamma}} = \hat{\mathbf{\Gamma}}_{et} + \hat{\mathbf{\Gamma}}_p$

A.2 Familie 1: Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeiten

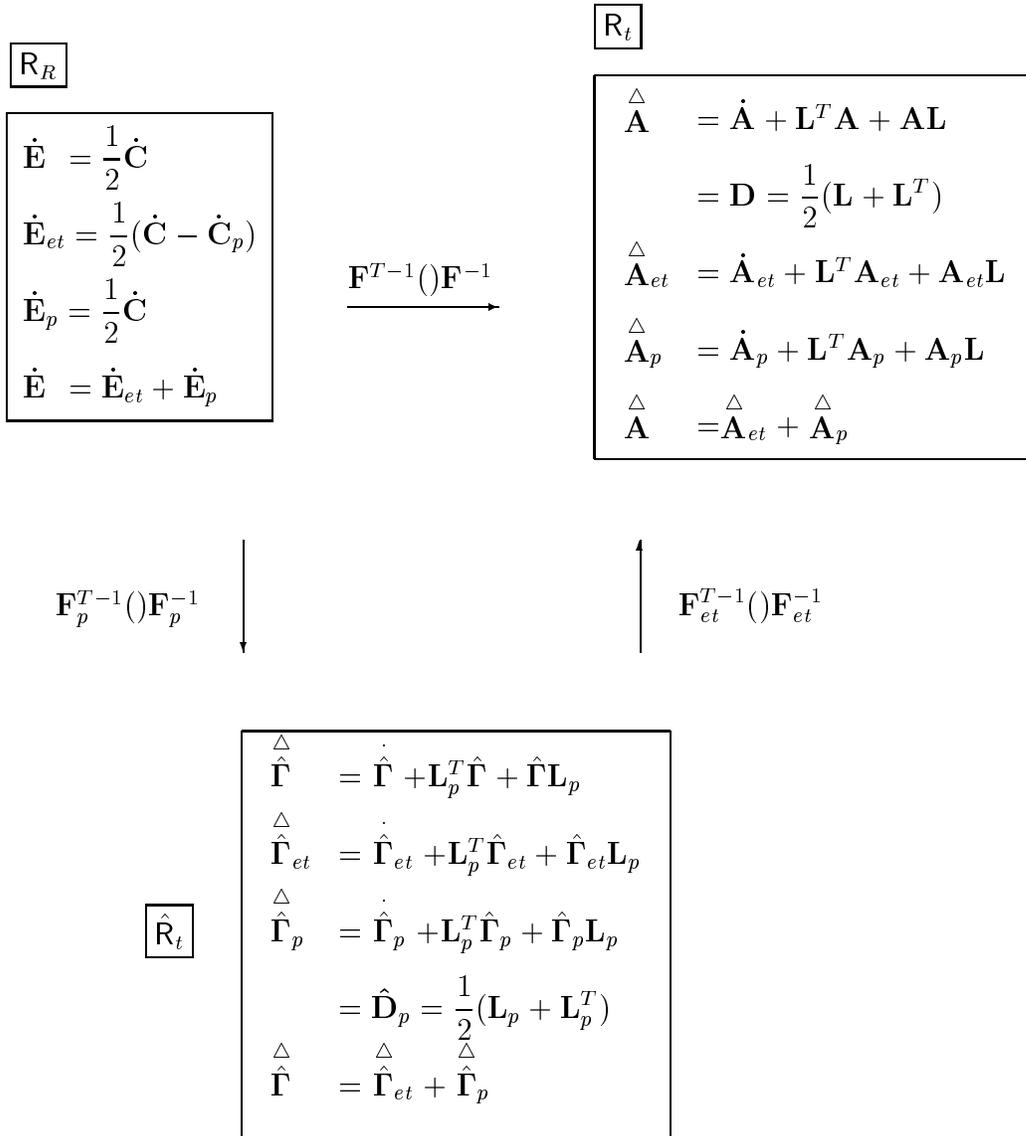
$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{C}_{et} = \mathbf{F}_{et}^T \mathbf{F}_{et}, \quad \mathbf{C}_p = \mathbf{F}_p^T \mathbf{F}_p,$$

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{L}_{et} = \dot{\mathbf{F}}_{et} \mathbf{F}_{et}^{-1}, \quad \mathbf{L}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1},$$

$(\cdot)^\cdot$: bzgl. \mathbf{R}_R

$(\cdot)^\Delta = (\cdot)^\cdot + \mathbf{L}_p^T (\cdot) + (\cdot) \mathbf{L}_p$: bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_t$

$(\cdot)^\Delta = (\cdot)^\cdot + \mathbf{L}^T (\cdot) + (\cdot) \mathbf{L}$: bzgl. \mathbf{R}_t



A.3 Familie 2: Zerlegung der Verzerrungstensoren

$\boxed{R_R}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{T^{-1}} - \mathbf{1})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{et} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1}\mathbf{F}^{T^{-1}} - \mathbf{F}_p^{-1}\mathbf{F}_p^{T^{-1}})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_p^{-1}\mathbf{F}_p^{T^{-1}} - \mathbf{1})$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_{et} + \boldsymbol{\varepsilon}_p$$

$\boxed{R_t}$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}\mathbf{F}^T)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{et} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}_{et}\mathbf{F}_{et}^T)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{et}\mathbf{F}_{et}^T - \mathbf{F}\mathbf{F}^T)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_{et} + \boldsymbol{\alpha}_p$$

$\xrightarrow{\mathbf{F}()\mathbf{F}^T}$

$\mathbf{F}_p()\mathbf{F}_p^T$



$\mathbf{F}_{et}()\mathbf{F}_{et}^T$



$\boxed{\hat{R}_t}$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{et}^{-1}\mathbf{F}_{et}^{T^{-1}} - \mathbf{F}_p\mathbf{F}_p^T)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_{et} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_{et}^{-1}\mathbf{F}_{et}^{T^{-1}} - \mathbf{1})$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}_p\mathbf{F}_p^T)$$

$$\hat{\boldsymbol{\gamma}} = \hat{\boldsymbol{\gamma}}_{et} + \hat{\boldsymbol{\gamma}}_p$$

A.4 Familie 2: Zerlegung der Verzerrungsgeschwindigkeiten

$(\dot{\cdot})$: bzgl. \mathbf{R}_R

$(\dot{\cdot})^\Delta = (\dot{\cdot}) - \mathbf{L}_p(\dot{\cdot}) - (\dot{\cdot})\mathbf{L}_p^T$: bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_t$

$(\dot{\cdot})^\Delta = (\dot{\cdot}) - \mathbf{L}(\dot{\cdot}) - (\dot{\cdot})\mathbf{L}^T$: bzgl. \mathbf{R}_t

\mathbf{R}_R

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1})\dot{\cdot} \\ \dot{\mathbf{e}}_{et} &= \frac{1}{2}(\mathbf{C}^{-1} - \mathbf{C}_p^{-1})\dot{\cdot} \\ \dot{\mathbf{e}}_p &= \frac{1}{2}(\mathbf{C}_p^{-1})\dot{\cdot} \\ \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{e}}_{et} + \dot{\mathbf{e}}_p\end{aligned}$$

$\mathbf{F}(\dot{\cdot})\mathbf{F}^T$

\mathbf{R}_t

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}^\Delta &= \dot{\alpha} - \mathbf{L}\alpha - \alpha\mathbf{L}^T \\ &= -\mathbf{D} = -\frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \\ \dot{\alpha}_{et}^\Delta &= \dot{\alpha}_{et} - \mathbf{L}\alpha_{et} - \alpha_{et}\mathbf{L}^T \\ \dot{\alpha}_p^\Delta &= \dot{\alpha}_p - \mathbf{L}\alpha_p - \alpha_p\mathbf{L}^T \\ \dot{\alpha}^\Delta &= \dot{\alpha}_{et}^\Delta + \dot{\alpha}_p^\Delta\end{aligned}$$

$\mathbf{F}_p(\dot{\cdot})\mathbf{F}_p^T$



$\mathbf{F}_{et}(\dot{\cdot})\mathbf{F}_{et}^T$



$\hat{\mathbf{R}}_t$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\gamma}}^\Delta &= \dot{\hat{\gamma}} - \mathbf{L}_p\hat{\gamma} - \hat{\gamma}\mathbf{L}_p^T \\ \dot{\hat{\gamma}}_{et}^\Delta &= \dot{\hat{\gamma}}_{et} - \mathbf{L}_p\hat{\gamma}_{et} - \hat{\gamma}_{et}\mathbf{L}_p^T \\ \dot{\hat{\gamma}}_p^\Delta &= \dot{\hat{\gamma}}_p - \mathbf{L}_p\hat{\gamma}_p - \hat{\gamma}_p\mathbf{L}_p^T \\ &= -\hat{\mathbf{D}}_p = -\frac{1}{2}(\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_p^T) \\ \dot{\hat{\gamma}}^\Delta &= \dot{\hat{\gamma}}_{et}^\Delta + \dot{\hat{\gamma}}_p^\Delta\end{aligned}$$

A.5 Familie 1: Spannungstensoren und Ableitungen

$(\dot{}) : \text{bzgl. } \mathbf{R}_R$

$(\overset{\nabla}{}) = (\dot{} - \mathbf{L}_p() - ()\mathbf{L}_p^T) : \text{bzgl. } \hat{\mathbf{R}}_t$

$(\overset{\nabla}{}) = (\dot{} - \mathbf{L}() - ()\mathbf{L}^T) : \text{bzgl. } \mathbf{R}_t$

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\mathbf{R}_R} & & \boxed{\mathbf{R}_t} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \tilde{\mathbf{T}} \\ \hline \dot{\tilde{\mathbf{T}}} \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\mathbf{F}(\cdot)\mathbf{F}^T} & \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{S} = \mathbf{F}\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{F}^T = (\det\mathbf{F})\mathbf{T} \\ \hline \overset{\nabla}{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}} - \mathbf{L}\mathbf{S} - \mathbf{S}\mathbf{L}^T \\ \hline \end{array} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{F}_p(\cdot)\mathbf{F}_p^T \\ \hline \downarrow \\ \hline \end{array} & & \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{F}_{et}(\cdot)\mathbf{F}_{et}^T \\ \hline \uparrow \\ \hline \end{array} \\
 \boxed{\hat{\mathbf{R}}_t} & & \begin{array}{|c|} \hline \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{F}_p\tilde{\mathbf{T}}\mathbf{F}_p^T \\ \hline \overset{\nabla}{\hat{\mathbf{T}}} = \dot{\hat{\mathbf{T}}} - \mathbf{L}_p\hat{\mathbf{T}} - \hat{\mathbf{T}}\mathbf{L}_p^T \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

A.6 Familie 2: Spannungstensoren und Ableitungen

$(\cdot)^\cdot$: bzgl. \mathbf{R}_R

$(\cdot)^\nabla = (\cdot)^\cdot + \mathbf{L}_p^T(\cdot) + (\cdot)\mathbf{L}_p$: bzgl. $\hat{\mathbf{R}}_t$

$(\cdot)^\nabla = (\cdot)^\cdot + \mathbf{L}^T(\cdot) + (\cdot)\mathbf{L}$: bzgl. \mathbf{R}_t

$$\begin{array}{ccc}
 \boxed{\mathbf{R}_R} & & \boxed{\mathbf{R}_t} \\
 \begin{array}{|c|} \hline \tilde{\boldsymbol{\tau}} \\ \hline \dot{\tilde{\boldsymbol{\tau}}} \\ \hline \end{array} & \xrightarrow{\mathbf{F}^{T-1}(\cdot)\mathbf{F}^{-1}} & \begin{array}{|c|} \hline \boldsymbol{\varsigma} = \mathbf{F}^{T-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{F}^{-1} = -(\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \\ \hline \nabla \boldsymbol{\varsigma} = \dot{\boldsymbol{\varsigma}} + \mathbf{L}^T \boldsymbol{\varsigma} + \boldsymbol{\varsigma} \mathbf{L} \\ \hline \end{array} \\
 \mathbf{F}_p^{T-1}(\cdot)\mathbf{F}_p^{-1} \downarrow & & \uparrow \mathbf{F}_{et}^{T-1}(\cdot)\mathbf{F}_{et}^{-1} \\
 \boxed{\hat{\mathbf{R}}_t} & & \begin{array}{|c|} \hline \hat{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{F}_p^{T-1} \tilde{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{F}_p^{-1} \\ \hline \nabla \hat{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\tau}}} + \mathbf{L}_p^T \hat{\boldsymbol{\tau}} + \hat{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{L}_p \\ \hline \end{array}
 \end{array}$$

B Zur Berechnung der spezifischen Wärmekapazität

Die *spezifische Wärmekapazität bei konstanter Verzerrung* (4.38) berechnet sich aufgrund der Zerlegungen (4.1), (3.11) sowie der Annahme (4.29) wie folgt:

$$c_\varepsilon = -\theta \frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \theta^2} = -\theta \left\{ \frac{(1-d)}{\rho_R} \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho_R} \frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi_p^{iso}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Psi_p^{kin}}{\partial \theta^2} \right\} . \quad (B.1)$$

Die Ansätze (4.56), (4.57), (4.15) und (4.21), partiell nach der Temperatur differenziert, führen unter Einbeziehung von (4.63), (4.65) und (3.31) zu

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta} [\hat{\Gamma}_e] \cdot \hat{\Gamma}_e - (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \mathcal{C} [\hat{\Gamma}_{et} - \alpha \Delta \theta_r \mathbf{1}] \cdot \mathbf{1} , \quad (B.2)$$

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta} [\hat{\Gamma}_t] \cdot \hat{\Gamma}_t - 9 \kappa (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \alpha \Delta \theta_r - \rho_R \left(c_\varepsilon^* \ln \frac{\theta}{\theta_r} + C_1 \right) , \quad (B.3)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}^{iso}}{\partial \theta} = \frac{(1-d)}{\rho_R} \left\{ \frac{1}{2} \gamma' r^2 + h' r \right\} , \quad (B.4)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}^{kin}}{\partial \theta} = \frac{(1-d)}{2 \rho_R} c' \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} . \quad (B.5)$$

Unter der Voraussetzung kleiner thermoelastischer Verzerrungen kann der erste Term in (B.2) bzw. in (B.3) vernachlässigt werden, so daß (B.2), (B.3) durch

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta} = -(\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \mathcal{C} [\hat{\Gamma}_{et} - \alpha \Delta \theta_r \mathbf{1}] \cdot \mathbf{1} , \quad (B.6)$$

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial \theta} = -9 \kappa (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \alpha \Delta \theta_r - \rho_R \left(c_\varepsilon^* \ln \frac{\theta}{\theta_r} + C_1 \right) \quad (B.7)$$

approximiert werden kann. Erneute partielle Differentiation der Ausdrücke (B.6), (B.7) (B.4), (B.5) nach der Temperatur liefert

$$\frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \theta^2} = -(\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta} [\hat{\Gamma}_e] \cdot \mathbf{1} + 9 \kappa (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha)^2 - 3 \kappa (\alpha'' \Delta \theta_r + 2 \alpha') (\text{Sp } \hat{\Gamma}_e) , \quad (B.8)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{K}}{\partial \theta^2} = -(\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \theta} [\hat{\Gamma}_t] \cdot \mathbf{1} - 9 \kappa (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha)^2 - 9 \kappa (\alpha'' \Delta \theta_r + 2 \alpha') \alpha \Delta \theta_r - \frac{\rho_R}{\theta} c_\varepsilon^* \quad (B.9)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}^{iso}}{\partial \theta^2} = \frac{(1-d)}{\rho_R} \left\{ \frac{1}{2} \gamma'' r^2 + h'' r \right\}, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}^{kin}}{\partial \theta^2} = \frac{(1-d)}{2 \rho_R} c'' \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} \quad (\text{B.11})$$

und nach Einsetzen in (B.1) unter Berücksichtigung von (4.63), (4.65) und (3.31)

$$\begin{aligned} \frac{\rho_R}{\theta} c_\varepsilon &= (1-d) \left\{ 3 \kappa' (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) (\text{Sp} \hat{\Gamma}_e) - 9 \kappa (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha)^2 + 3 \kappa (\alpha'' \Delta \theta_r + 2 \alpha') (\text{Sp} \hat{\Gamma}_e) \right\} \\ &\quad + 9 \kappa' (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) \alpha \Delta \theta_r + 9 \kappa (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha)^2 + 9 \kappa (\alpha'' \Delta \theta_r + 2 \alpha') \alpha \Delta \theta_r \\ &\quad + \frac{\rho_R}{\theta} c_\varepsilon^* - (1-d) \left\{ \frac{1}{2} \gamma'' r^2 + h'' r + \frac{c''}{2} \hat{\mathbf{Y}} \cdot \hat{\mathbf{Y}} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Die Größen $()''$ kennzeichnen hierbei die zweifachen Ableitungen nach der Temperatur. Setzt man ferner voraus, daß alle Materialparameter im betrachteten Temperaturintervall linear interpoliert werden, so geht (B.12) über in

$$\frac{\rho_R}{\theta} c_\varepsilon = \frac{\rho_R}{\theta} c_\varepsilon^* + f \quad (\text{B.13})$$

mit

$$f = 9 \kappa (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha)^2 d + (\kappa' (\alpha' \Delta \theta_r + \alpha) + 2 \kappa \alpha') (9 \alpha \Delta \theta_r + 3 (1-d) \text{Sp} \hat{\Gamma}_e). \quad (\text{B.14})$$

Da bei kleinen thermoelastischen Verzerrungen der Term f vernachlässigbar ist, nimmt die spezifische Wärmekapazität einen konstanten Wert

$$c_\varepsilon = \text{konst.} = c_\varepsilon^* \quad (\text{B.15})$$

an.

C Berechnung der Beiträge zur Tangentensteifigkeit

Wie bereits in Kapitel 5.2.6 angesprochen, müssen in UMAT die Größen

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta \theta} \quad , \quad \frac{\partial w_g}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \frac{\partial w_g}{\partial \Delta \theta} \quad (C.1)$$

am Inkrementende zur Verfügung gestellt werden. Die analytische Berechnung dieser Größen ist, wie das folgende Kapitel zeigt, mit einigem Aufwand verbunden.

Gemäß den Beziehungen (5.118) – (5.122) gilt für die partiellen Ableitungen der in der Materialroutine berechneten Zustandsgrößen nach dem Verzerrungsinkrement

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^{II} \mathbf{S}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^{III} \mathbf{Z}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^{III} \mathbf{k}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^{II} \mathbf{d}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (C.2)$$

bzw. für deren Ableitungen nach dem Temperaturinkrement

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{II} \mathbf{S}}{\partial \Delta \theta} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{III} \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{III} \mathbf{k}}{\partial \Delta \theta} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{II} \mathbf{d}}{\partial \Delta \theta} \quad . \quad (C.3)$$

Mit Hilfe dieser Größen wiederum lassen sich die Ableitungen (C.1)₃ und (C.1)₄ bestimmen. Die Berechnung der Terme (C.2) und (C.3) erfolgt sukzessive und zwar zunächst für Teilproblem I, dann für Teilproblem II und abschließend für Teilproblem III.

Im folgenden gelte auch hier, wie bereits zuvor vereinbart, daß Größen zum Zeitpunkt t durch den Index 0, zum Zeitpunkt $t + \Delta t/2$ durch den Index 1/2 und zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ durch den Index 1 gekennzeichnet werden. Weiterhin werden im betrachteten Temperaturintervall $\Delta \theta$ die Materialparameter linear interpoliert. Für einen beliebigen Materialparameter v mit $v_1 = \check{v}(\Delta \theta)$ gilt somit

$$v'_1 = \frac{\partial v_1}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial \check{v}}{\partial \Delta \theta} \quad , \quad (C.4)$$

während Temperaturableitungen höherer Ordnung verschwinden.

C.1 Beiträge aus Operator I

(A) Spannung

Mit der Definition

$$\mathbf{B} := \mathbf{S}_0^* + \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{S}_0^* + \mathbf{S}_0^* \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) + (1-d_0) \mathbf{C}_{1/2} [\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - C_{\alpha_{1/2}} \Delta\theta \mathbf{1}] \quad (\text{C.5})$$

lautet Gleichung (5.80)

$${}^I \mathbf{S}_1 = \mathbf{Z}^{-1} [\mathbf{B}] \quad . \quad (\text{C.6})$$

Somit erhält man für deren partielle Ableitung nach dem Verzerrungskrement

$$\frac{\partial^I \mathbf{S}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^I \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{A} + \mathcal{D} \quad (\text{C.7})$$

mit

$$\mathcal{A}_{ijrs} = \frac{\partial (\mathbf{Z}^{-1})_{ijmn}}{\partial \Delta \varepsilon_{rs}} B_{mn} = (\mathbf{Z}^{-1})_{ijrq} {}^I S_{1sq} \quad , \quad (\text{C.8})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{ijrs} &= (\mathbf{Z}^{-1})_{ijmn} \frac{\partial B_{mn}}{\partial \Delta \varepsilon_{rs}} \\ &= (\mathbf{Z}^{-1})_{ijmn} \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{mr} (\mathbf{S}_0^*)_{sn} + \delta_{ns} (\mathbf{S}_0^*)_{mr}) + (1-d_0) (\mathbf{C}_{1/2})_{mnr s} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

bzw. nach dem Temperaturinkrement

$$\frac{\partial^I \mathbf{S}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^I \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} = \mathbf{Z}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Delta \theta} \right] \quad (\text{C.10})$$

mit

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Delta \theta} = (1-d_0) \left\{ \frac{\partial \mathbf{C}_{1/2}}{\partial \Delta \theta} [\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - C_{\alpha_{1/2}} \Delta\theta \mathbf{1}] - \left(C_{\alpha_{1/2}} + \frac{\partial C_{\alpha_{1/2}}}{\partial \Delta \theta} \Delta\theta \right) \mathbf{C}_{1/2} [\mathbf{1}] \right\} \quad . \quad (\text{C.11})$$

(B) Kinematische Verfestigung

In analoger Vorgehensweise wird zunächst

$$\mathbf{M} := (1 + C_{Z_{1/2}} \Delta\theta) \mathbf{Z}_0^* + \frac{1}{2} (\Delta\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{Z}_0^* + \mathbf{Z}_0^* \Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (\text{C.12})$$

definiert, so daß Gleichung (5.81) in der Form

$${}^I \mathbf{Z}_1 = \mathcal{P}^{-1} [\mathbf{M}] \quad (\text{C.13})$$

geschrieben werden kann. Dies wiederum führt zu

$$\frac{\partial^I \mathbf{Z}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^I \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{F} + \mathcal{G} \quad , \quad (\text{C.14})$$

wobei

$$\mathcal{F}_{ijrs} = \frac{\partial (\mathcal{P}^{-1})_{ijmn}}{\partial \Delta \varepsilon_{rs}} M_{mn} = (\mathcal{P}^{-1})_{ijrq} \, {}^I Z_{1sq} \quad , \quad (\text{C.15})$$

$$\mathcal{G}_{ijrs} = (\mathcal{P}^{-1})_{ijmn} \frac{\partial M_{mn}}{\partial \Delta \varepsilon_{rs}} = \frac{1}{2} (\mathcal{P}^{-1})_{ijmn} (\delta_{mr} (\mathbf{Z}_0^*)_{sn} + \delta_{ns} (\mathbf{Z}_0^*)_{mr}) \quad . \quad (\text{C.16})$$

Weiterhin gilt

$$\frac{\partial^I \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^I \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial \mathcal{P}^{-1}}{\partial \Delta \theta} [\mathbf{M}] + \mathcal{P}^{-1} \left[\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \Delta \theta} \right] \quad (\text{C.17})$$

mit

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{-1}}{\partial \Delta \theta} = -\mathcal{P}^{-1} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \Delta \theta} \mathcal{P}^{-1} \quad , \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \Delta \theta} = - \left(C_{Z_{1/2}} + \frac{\partial C_{Z_{1/2}}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta \right) \boldsymbol{\varepsilon} \quad , \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \Delta \theta} = \left(C_{Z_{1/2}} + \frac{\partial C_{Z_{1/2}}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta \right) \mathbf{Z}_0^* \quad , \quad (\text{C.20})$$

so daß (C.17) übergeht in

$$\frac{\partial^I \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} = \left(C_{Z_{1/2}} + \frac{\partial C_{Z_{1/2}}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta \right) \mathcal{P}^{-1} [{}^I \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_0^*] \quad . \quad (\text{C.21})$$

(C) Isotrope Verfestigung

Entsprechend Gleichung (5.82) ergibt sich für die isotrope Verfestigung folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^I \mathbf{k}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^I \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{1}{1 - C_{K_{1/2}} \Delta \theta} & \left\{ \left(C_{K_{1/2}} + \frac{\partial C_{K_{1/2}}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta \right) ({}^I \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_0 - 2(1 - \mathbf{d}_0) h_{1/2}) + \right. \\ & \left. + (1 - \mathbf{d}_0) \left(h'_{1/2} - 2 C_{K_{1/2}} \frac{\partial h_{1/2}}{\partial \Delta \theta} \Delta \theta \right) \right\} \quad . \quad (\text{C.22}) \end{aligned}$$

C.2 Beiträge aus Operator II

(A) Spannung

Die partiellen Ableitungen der Spannung nach dem Verzerrungskrement bzw. nach dem Temperaturkrement können aufgrund der Darstellung (5.150) in der Form

$$\frac{\partial^{II} \mathbf{S}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial \xi} \otimes \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \left(\frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial^{II} \mathbf{d}} \otimes \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (\text{C.23})$$

$$\frac{\partial^{II} \mathbf{S}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial^{II} \mathbf{d}} \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{C.24})$$

geschrieben werden, wobei die tensoriellen Größen

$$\frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial \xi} = -2 \mu_1 (1 - {}^{II} \mathbf{d}_1) \left({}^{II} \mathbf{N}_1 + \xi_1 \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \right) , \quad (\text{C.25})$$

$$\frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial^{II} \mathbf{d}} = - \left(\frac{\mathbf{S}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1 , \quad (\text{C.26})$$

$$\frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - {}^{II} \mathbf{d}_1) \left(\frac{1}{1 - \mathbf{d}_0} \frac{\partial^I \mathbf{S}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} - 2 \mu_1 \xi_1 \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) , \quad (\text{C.27})$$

$$\frac{\partial^{II} \check{\mathbf{S}}}{\partial \Delta \theta} = (1 - {}^{II} \mathbf{d}_1) \left(\frac{1}{1 - \mathbf{d}_0} \frac{\partial^I \mathbf{S}}{\partial \Delta \theta} - 2 \mu_1' \xi_1 {}^{II} \mathbf{N}_1 - 2 \mu_1 \xi_1 \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \theta} \right) \quad (\text{C.28})$$

unmittelbar aus (5.93) hervorgehen.

Auf die Berechnung der Ableitungen $\partial^{II} \check{\mathbf{N}}/\partial \xi$, $\partial^{II} \check{\mathbf{N}}/\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ und $\partial^{II} \check{\mathbf{N}}/\partial \Delta \theta$ wird in Unterpunkt (D) eingegangen, während die Terme $\partial \check{\xi}/\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\partial^{II} \check{\mathbf{d}}/\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\partial \check{\xi}/\partial \Delta \theta$ und $\partial^{II} \check{\mathbf{d}}/\partial \Delta \theta$ gemäß Unterpunkt (E) bestimmt werden.

(B) Kinematische Verfestigung

Analoge Vorgehensweise liefert unter Berücksichtigung der Beziehungen (5.151) und (5.94)

$$\frac{\partial^{II} \mathbf{Z}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial^{II} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \xi} \otimes \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \left(\frac{\partial^{II} \check{\mathbf{Z}}}{\partial^{II} \mathbf{d}} \otimes \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (\text{C.29})$$

$$\frac{\partial^{II} \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{Z}}}{\partial^{II} \mathbf{d}} \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{C.30})$$

mit

$$\frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \xi} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1} \left\{ -\sqrt{\frac{2}{3}} b_1 {}^{II} \mathbf{Z}_1 + (1 - {}^{II} d_1) \left(c_1 {}^{II} \mathbf{N}_1 + c_1 \xi_1 \frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \right) \right\}, \quad (\text{C.31})$$

$$\frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial^{II} d} = - \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right)_1, \quad (\text{C.32})$$

$$\frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{(1 - {}^{II} d_1)}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1} \left(\frac{1}{1-d_0} \frac{\partial^I \mathbf{Z}}{\partial \Delta \epsilon} + c_1 \xi_1 \frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \epsilon} \right), \quad (\text{C.33})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} &= \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1} \left\{ -\sqrt{\frac{2}{3}} \xi_1 b_1 {}^{II} \mathbf{Z}_1 + \right. \\ &\quad \left. + (1 - {}^{II} d_1) \left(\frac{1}{1-d_0} \frac{\partial^I \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} + c_1' \xi_1 {}^{II} \mathbf{N}_1 + c_1 \xi_1 \frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \theta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

(C) Isotrope Verfestigung

Ausgehend von (5.152) folgt für die Ableitungen der isotropen Verfestigung

$$\frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{k}}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \Delta \epsilon} + \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{k}}}{\partial^{II} d} \frac{\partial^{II} d}{\partial \Delta \epsilon}, \quad (\text{C.35})$$

$$\frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{k}}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{k}}}{\partial^{II} d} \frac{\partial^{II} d}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \theta}, \quad (\text{C.36})$$

wobei die Ausdrücke

$$\frac{\partial^{II} \check{\mathbf{k}}}{\partial \xi} = \frac{(1 - {}^{II} d_1)}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \phi_1 \beta_1 \xi_1} \sqrt{\frac{2}{3}} \phi_1 \left\{ -\beta_1 \left(\left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right)_1 - h_1 \right) + \gamma_1 \right\}, \quad (\text{C.37})$$

$$\frac{\partial^{II} \check{\mathbf{k}}}{\partial^{II} d} = - \left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right)_1, \quad (\text{C.38})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \theta} &= \frac{(1 - {}^{II} d_1)}{1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \phi_1 \beta_1 \xi_1} \left\{ -\sqrt{\frac{2}{3}} \xi_1 (\phi_1' \beta_1 + \phi_1 \beta_1') \left(\left(\frac{\mathbf{k}}{1-d} \right)_1 - h_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\frac{2}{3}} \xi_1 (\gamma_1 \phi_1' + \phi_1 \gamma_1' + \phi_1 \beta_1 h_1') + \frac{1}{1-d_0} \frac{\partial^I \mathbf{k}}{\partial \Delta \theta} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

aus Gleichung (5.95) gewonnen werden.

(D) Normale

Aufgrund der Beziehungen (5.108) und (5.109) gilt für die Normale

$${}^I \tilde{\mathbf{N}} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\Xi}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\Xi}}\|} \quad (\text{C.40})$$

und somit für deren partielle Ableitungen

$$\frac{\partial {}^I \tilde{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\mathcal{H}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Xi}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad (\text{C.41})$$

$$\frac{\partial {}^I \tilde{\mathbf{N}}}{\partial \Delta \theta} = \boldsymbol{\mathcal{H}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Xi}}}{\partial \Delta \theta} \quad , \quad (\text{C.42})$$

$$\frac{\partial {}^I \tilde{\mathbf{N}}}{\partial \xi} = \boldsymbol{\mathcal{H}} \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Xi}}}{\partial \xi} \quad (\text{C.43})$$

mit

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{\|\tilde{\boldsymbol{\Xi}}\|} \left(\boldsymbol{\varepsilon} - ({}^I \mathbf{N}_1 \otimes {}^I \mathbf{N}_1) \right) \quad . \quad (\text{C.44})$$

Zudem folgt aus Gleichung (5.106)

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Xi}}}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right)_1^D \quad , \quad (\text{C.45})$$

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Xi}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{1-d_0} \left((1 + \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1) \frac{\partial {}^I \mathbf{S}^D}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial {}^I \mathbf{Z}^D}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \quad , \quad (\text{C.46})$$

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\Xi}}}{\partial \Delta \theta} = \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1 \left(\frac{\mathbf{S}}{1-d} \right)_1^D + \frac{1}{1-d_0} \left((1 + \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1) \frac{\partial {}^I \mathbf{S}^D}{\partial \Delta \theta} - \frac{\partial {}^I \mathbf{Z}^D}{\partial \Delta \theta} \right) \quad , \quad (\text{C.47})$$

wobei

$$\frac{\partial {}^I \mathbf{S}^D}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \frac{\partial {}^I \mathbf{S}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad (\text{C.48})$$

$$\frac{\partial {}^I \mathbf{Z}^D}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \frac{\partial {}^I \mathbf{Z}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \quad , \quad (\text{C.49})$$

$$\frac{\partial {}^I \mathbf{S}^D}{\partial \Delta \theta} = \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \frac{\partial {}^I \mathbf{S}}{\partial \Delta \theta} \quad , \quad (\text{C.50})$$

$$\frac{\partial' \mathbf{Z}^D}{\partial \Delta \theta} = \left(\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right) \frac{\partial' \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} . \quad (\text{C.51})$$

(E) Plastischer Multiplikator und Schädigungsvariable

Die Berechnung der Terme $\partial \check{\xi} / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\partial'' \check{\mathbf{d}} / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$, $\partial \check{\xi} / \partial \Delta \theta$, $\partial'' \check{\mathbf{d}} / \partial \Delta \theta$ erfolgt mit Hilfe der Beziehungen (5.109) und (5.110). Hierzu werden zunächst deren totale Differentiale

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \cdot d\Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \theta} \right) d\Delta \theta + \\ & + \left(\frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \mathbf{Q}} \right) \cdot d\mathbf{Q} = 0 , \end{aligned} \quad (\text{C.52})$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial'' \mathbf{d}} \frac{\partial'' \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \cdot d\Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial'' \mathbf{d}} \frac{\partial'' \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \theta} \right) d\Delta \theta + \\ & + \left(\frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial'' \mathbf{d}} \frac{\partial'' \check{\mathbf{d}}}{\partial \mathbf{Q}} \right) \cdot d\mathbf{Q} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.53})$$

gebildet, aus denen unmittelbar

$$\frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} , \quad (\text{C.54})$$

$$\frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial'' \mathbf{d}} \frac{\partial'' \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} , \quad (\text{C.55})$$

$$\frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \theta} = 0 , \quad (\text{C.56})$$

$$\frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \xi} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial'' \mathbf{d}} \frac{\partial'' \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \theta} = 0 \quad (\text{C.57})$$

folgt. Aufgrund dessen erhält man für die gesuchten Größen

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \\ \frac{\partial'' \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \\ \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \end{bmatrix} , \quad (\text{C.58})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \check{\xi}}{\partial \Delta \theta} \\ \frac{\partial'' \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \theta} \end{bmatrix} = -\mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial'' \check{\Phi}}{\partial \Delta \theta} \\ \frac{\partial'' \check{\cdot}}{\partial \Delta \theta} \end{bmatrix} \quad (\text{C.59})$$

mit der Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^{II} \tilde{\Phi}}{\partial \xi} & 0 \\ \frac{\partial^{II, \sim}}{\partial \xi} & \frac{\partial^{II, \sim}}{\partial^{II} \mathbf{d}} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.60})$$

deren Inverse durch

$$\mathbf{J}^{-1} = \left(\frac{\partial^{II} \tilde{\Phi}}{\partial \xi} \quad \frac{\partial^{II, \sim}}{\partial^{II} \mathbf{d}} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial^{II, \sim}}{\partial^{II} \mathbf{d}} & 0 \\ -\frac{\partial^{II, \sim}}{\partial \xi} & \frac{\partial^{II} \tilde{\Phi}}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (\text{C.61})$$

gegeben ist.

Die Komponenten der Matrix \mathbf{J} berechnen sich wie folgt:

Die Beziehungen (5.109), (5.107) und (5.103) liefern

$$\frac{\partial^{II} \tilde{\Phi}}{\partial \xi} = {}^{II} \mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial \tilde{\Xi}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi} - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \xi} \quad (\text{C.62})$$

mit

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi} = \frac{g_1}{\xi_1} + \left(2\mu_1 \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 + \frac{2}{3} b_1 \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \xi} \right) \xi_1, \quad (\text{C.63})$$

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial \xi} = \begin{cases} \frac{1}{1-{}^{II} \mathbf{d}_1} \frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{k}}}{\partial \xi} & (\text{PL}) \\ \frac{1}{1-{}^{II} \mathbf{d}_1} \frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{k}}}{\partial \xi} + \frac{1}{m_1 \xi_1} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\eta_1 \xi_1}{\Delta t} \right)^{1/m_1} & (\text{VP}) \end{cases}. \quad (\text{C.64})$$

Die Ausdrücke $\partial \tilde{\Xi} / \partial \xi$ und $\partial^{II} \tilde{\mathbf{k}} / \partial \xi$ sind durch die Gleichungen (C.37) und (C.45) bestimmt. Weiterhin ergibt sich aus (5.110) unter Einbeziehung von (5.98) und (5.93) für die übrigen Komponenten

$$\frac{\partial^{II, \sim}}{\partial \xi} = -\sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ a_{01} + (a_{11} + a_{21} {}^{II} \mathbf{d}_1) \frac{(-\Omega_{et_1})^{n_1}}{(1-{}^{II} \mathbf{d}_1)^{q_1}} \left(1 - \frac{\xi_1 n_1}{(-\Omega_{et_1})} \frac{\partial \tilde{\Omega}_{et}}{\partial \xi} \right) \right\}, \quad (\text{C.65})$$

$$\frac{\partial^{II, \sim}}{\partial^{II} \mathbf{d}} = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \xi_1 \frac{(-\Omega_{et_1})^{n_1}}{(1-{}^{II} \mathbf{d}_1)^{q_1}} \left\{ a_{21} + (a_{11} + a_{21} {}^{II} \mathbf{d}_1) \frac{q_1}{1-{}^{II} \mathbf{d}_1} \right\} \quad (\text{C.66})$$

mit

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_{et}}{\partial \xi} = {}^{II} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-\mathbf{d}} \right)_1^D \cdot \left({}^{II} \mathbf{N}_1 + \xi_1 \frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{N}}}{\partial \xi} \right). \quad (\text{C.67})$$

Der Ausdruck $\partial^{II} \tilde{\mathbf{N}}/\partial\xi$ ist durch (C.43) festgelegt.

Aufgrund der Beziehungen (5.93), (5.103), (5.107), (5.109) – (5.110) gelten für die verbleibenden Terme auf der rechten Seite der Gleichungen (C.58) und (C.59) folgende Zusammenhänge:

$$\frac{\partial^{II} \tilde{\Phi}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial\tilde{\Xi}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \left[{}^{II}\mathbf{N}_1 \right] , \quad (\text{C.68})$$

$$\frac{\partial^{II} \tilde{\Phi}}{\partial\Delta\theta} = {}^{II}\mathbf{N}_1 \cdot \frac{\partial\tilde{\Xi}}{\partial\Delta\theta} - \frac{\partial\tilde{g}}{\partial\Delta\theta} - \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\partial\tilde{k}}{\partial\Delta\theta} , \quad (\text{C.69})$$

$$\frac{\partial^{II} \tilde{\tau}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{2}{3}} n_1 \xi_1 (a_{11} + a_{21} {}^{II}\mathbf{d}_1) \frac{(-\Omega_{et_1})^{n_1-1}}{(1-{}^{II}\mathbf{d}_1)^{q_1}} \frac{\partial\tilde{\Omega}_{et}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (\text{C.70})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{II} \tilde{\tau}}{\partial\Delta\theta} = & -\sqrt{\frac{2}{3}} \xi_1 (a_0)'_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \xi_1 \frac{(-\Omega_{et_1})^{n_1}}{(1-{}^{II}\mathbf{d}_1)^{q_1}} \left\{ ((a_1)'_1 + (a_2)'_1 {}^{II}\mathbf{d}_1) + \right. \\ & \left. + (a_{11} + a_{21} {}^{II}\mathbf{d}_1) \left(\ln(-\Omega_{et_1}) n'_1 - \ln(1-{}^{II}\mathbf{d}_1) q'_1 - \frac{n_1}{(-\Omega_{et_1})} \frac{\partial\tilde{\Omega}_{et}}{\partial\Delta\theta} \right) \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.71})$$

wobei

$$\frac{\partial\tilde{g}}{\partial\Delta\theta} = \left(2\mu'_1 \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \xi_1 \right) + c'_1 + 2\mu_1 \sqrt{\frac{2}{3}} b'_1 \xi_1 + \frac{2}{3} b'_1 k_1 + \frac{2}{3} b_1 \frac{\partial\tilde{k}}{\partial\Delta\theta} \right) \xi_1 , \quad (\text{C.72})$$

$$\frac{\partial\tilde{k}}{\partial\Delta\theta} = \begin{cases} \frac{1}{1-{}^{II}\mathbf{d}_1} \frac{\partial^{II} \tilde{k}}{\partial\Delta\theta} & (\text{PL}) \\ \frac{1}{1-{}^{II}\mathbf{d}_1} \frac{\partial^{II} \tilde{k}}{\partial\Delta\theta} + \frac{1}{m_1} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\eta_1 \xi_1}{\Delta t} \right)^{1/m_1} \left\{ \frac{\eta'_1}{\eta_1} - \ln \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\eta_1 \xi_1}{\Delta t} \right) \frac{m'_1}{m_1} \right\} & (\text{VP}) \end{cases} \quad (\text{C.73})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\Omega}_{et}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} = & -\frac{1}{2\mu_1} \left(\frac{1}{1-\mathbf{d}_0} \frac{\partial^I \mathbf{S}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} - 2\mu_1 \xi_1 \frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{N}}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \left[\left(\frac{\mathbf{S}}{1-\mathbf{d}} \right)_1^D \right] - \\ & - \frac{1}{3(1-\mathbf{d}_0)(2\mu_1+3\lambda_1)} \left(\text{Sp}^I \left(\frac{\mathbf{S}}{1-\mathbf{d}} \right)_1 \right) \left(\frac{\partial^I \mathbf{S}}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T [\mathbf{1}] , \end{aligned} \quad (\text{C.74})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\tilde{\Omega}_{et}}{\partial\Delta\theta} = & \frac{\mu'_1}{4\mu_1^2} {}^{II} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-\mathbf{d}} \right)_1^D \cdot {}^{II} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-\mathbf{d}} \right)_1^D + \frac{(2\mu'_1+3\lambda_1)}{6(2\mu_1+3\lambda_1)^2} \left(\text{Sp}^I \left(\frac{\mathbf{S}}{1-\mathbf{d}} \right)_1 \right)^2 - \\ & - \frac{1}{2\mu_1} {}^{II} \left(\frac{\mathbf{S}}{1-\mathbf{d}} \right)_1^D \cdot \left(\frac{1}{1-\mathbf{d}_0} \frac{\partial^I \mathbf{S}}{\partial\Delta\theta} - 2\mu'_1 \xi_1 {}^{II}\mathbf{N}_1 - 2\mu_1 \xi_1 \frac{\partial^{II} \tilde{\mathbf{N}}}{\partial\Delta\theta} \right) - \\ & - \frac{1}{3(1-\mathbf{d}_0)(2\mu_1+3\lambda_1)} \left(\text{Sp}^I \left(\frac{\mathbf{S}}{1-\mathbf{d}} \right)_1 \right) \frac{\partial^I \mathbf{S}}{\partial\Delta\theta} \cdot \mathbf{1} . \end{aligned} \quad (\text{C.75})$$

Die Ausdrücke $\partial\tilde{\Xi}/\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$, $\partial\tilde{\Xi}/\partial\Delta\theta$, $\partial^{II} \tilde{k}/\partial\Delta\theta$, $\partial^{II} \tilde{\mathbf{N}}/\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\partial^{II} \tilde{\mathbf{N}}/\partial\Delta\theta$ berechnen sich gemäß den Beziehungen (C.46), (C.47), (C.39), (C.41) und (C.42).

C.3 Beiträge aus Operator III

(A) Kinematische Verfestigung

Ausgehend von der Darstellung (5.156) ergibt sich für die kinematische Verfestigung

$$\frac{\partial^{III} \mathbf{Z}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \left(\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \mathcal{K}} \otimes \frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) + \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (\text{C.76})$$

$$\frac{\partial^{III} \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \mathcal{K}} \frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} , \quad (\text{C.77})$$

wobei die Größen

$$\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \mathcal{K}} = - \frac{\Delta t p_1 (w_1 - 1) \mathcal{K}_1^{w_1 - 2}}{1 + \Delta t p_1 \mathcal{K}_1^{w_1 - 1}} {}^{III} \mathbf{Z}_1 , \quad (\text{C.78})$$

$$\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{1 + \Delta t p_1 \mathcal{K}_1^{w_1 - 1}} \frac{\partial^{II} \mathbf{Z}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (\text{C.79})$$

$$\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{Z}}}{\partial \Delta \theta} = \frac{1}{1 + \Delta t p_1 \mathcal{K}_1^{w_1 - 1}} \left\{ - \Delta t \mathcal{K}_1^{w_1 - 1} (p_1' + p_1 (\ln \mathcal{K}_1) w_1') {}^{III} \mathbf{Z}_1 + \frac{\partial^{II} \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} \right\} \quad (\text{C.80})$$

unmittelbar aus Gleichung (5.113) hervorgehen.

Zur Bestimmung der Terme $\partial \check{\mathcal{K}} / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ und $\partial \check{\mathcal{K}} / \partial \Delta \theta$ wird Gleichung (5.116) herangezogen. Unter Berücksichtigung von (5.157) erhält man

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \mathcal{K}} \frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \cdot d\Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \mathcal{K}} \frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial \Delta \theta} \right) d\Delta \theta + \\ & + \left(\frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \mathcal{K}} \frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial \mathbf{Q}} \right) \cdot d\mathbf{Q} = 0 , \end{aligned} \quad (\text{C.81})$$

was wiederum

$$\frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \mathcal{K}} \frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} , \quad (\text{C.82})$$

$$\frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \mathcal{K}} \frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial \Delta \theta} = \mathbf{0} \quad (\text{C.83})$$

bzw.

$$\frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = - \left(\frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \mathcal{K}} \right)^{-1} \frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (\text{C.84})$$

$$\frac{\partial \check{\mathcal{K}}}{\partial \Delta \theta} = - \left(\frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \mathcal{K}} \right)^{-1} \frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \Delta \theta} . \quad (\text{C.85})$$

zur Folge hat.

Die Berechnung der verbleibenden Größen

$$\frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \mathcal{K}} = 1 + \Delta t p_1 w_1 \mathcal{K}_1^{w_1-1} , \quad (\text{C.86})$$

$$\frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = - \frac{1}{\|{}^{II} \mathbf{Z}_1\|} \left(\frac{\partial^{II} \mathbf{Z}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right)_1 \otimes \frac{\partial^{II} \check{d}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \right)^T \left[\left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right)_1 \right] , \quad (\text{C.87})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{III} \check{\Phi}}{\partial \Delta \theta} &= \Delta t \mathcal{K}_1^{w_1} (p'_1 + (\ln \mathcal{K}_1) w'_1) - \\ &\quad - \frac{1}{\|{}^{II} \mathbf{Z}_1\|} \left(\frac{\partial^{II} \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} + \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right)_1 \frac{\partial^{II} \check{d}}{\partial \Delta \theta} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{Z}}{1-d} \right)_1 \end{aligned} \quad (\text{C.88})$$

erfolgt mit Hilfe der Beziehung (5.116).

(B) Isotrope Verfestigung

Entsprechend der Darstellung (5.155) folgt für die isotrope Verfestigung:

$$\frac{\partial^{III} \mathbf{k}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (\text{C.89})$$

$$\frac{\partial^{III} \mathbf{k}}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \theta} . \quad (\text{C.90})$$

Ausgehend vom totalen Differential der Gleichung (5.117)

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial^{III} \mathbf{k}} \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right) \cdot d\Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \left(\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial^{III} \mathbf{k}} \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \theta} \right) d\Delta \theta + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial^{III} \mathbf{k}} \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{Q}} \right) \cdot d\mathbf{Q} = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.91})$$

erhält man für die gesuchten Terme

$$\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = - \left(\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial^{III} \mathbf{k}} \right)^{-1} \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (\text{C.92})$$

$$\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{k}}}{\partial \Delta \theta} = - \left(\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{d}}}{\partial^{III} \mathbf{k}} \right)^{-1} \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \theta} . \quad (\text{C.93})$$

Die benötigten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{d}}}{\partial^{III} \mathbf{k}} = \frac{A_1}{1 - {}^{II}d_1} , \quad (\text{C.94})$$

$$\frac{\partial^{III} \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \epsilon} = \frac{1}{1 - {}^{II}d_1} \left\{ \left(A_1 \frac{{}^{III}k_1}{1 - {}^{II}d_1} - \left(\frac{\mathbf{k}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1 \right) \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \epsilon} - \frac{\partial^{II} \mathbf{k}}{\partial \Delta \epsilon} \right\} , \quad (\text{C.95})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{III} \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \theta} &= \frac{1}{1 - {}^{II}d_1} \left\{ \left(A_1 \frac{{}^{III}k_1}{1 - {}^{II}d_1} - \left(\frac{\mathbf{k}}{1 - \mathbf{d}} \right)_1 \right) \frac{\partial^{II} \check{\mathbf{d}}}{\partial \Delta \theta} - \frac{\partial^{II} \mathbf{k}}{\partial \Delta \theta} \right\} + \\ &+ \Delta t \left(\frac{{}^{III}k_1}{1 - {}^{II}d_1} - h_1 \right)^{\omega_1 - 1} \left\{ \left(\frac{{}^{III}k_1}{1 - {}^{II}d_1} - h_1 \right) \left(\pi'_1 + \pi_1 \ln \left(\frac{{}^{III}k_1}{1 - {}^{II}d_1} - h_1 \right) \omega'_1 \right) - \pi_1 \omega_1 h'_1 \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.96})$$

mit

$$A_1 = 1 + \Delta t \pi_1 \omega_1 \left(\frac{{}^{III}k_1}{1 - {}^{II}d_1} - h_1 \right)^{\omega_1 - 1} \quad (\text{C.97})$$

gehen aus (5.117) hervor.

C.4 Beiträge der thermomechanischen Größen

Ausgehend von der Darstellung (5.172) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \left[\frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{S}} \right] + \left(\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \right)^T \left[\frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{Z}} \right] + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \\ &+ \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{d}} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} \ , \end{aligned} \quad (\text{C.98})$$

$$\frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{S}} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{Z}} \cdot \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{d}} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \Delta \theta} + \frac{\partial \check{w}_g}{\partial \Delta \theta} \ . \quad (\text{C.99})$$

Die unbekanntenen Größen $\partial \check{w}_g / \partial \mathbf{S}$, $\partial \check{w}_g / \partial \mathbf{Z}$, $\partial \check{w}_g / \partial \mathbf{k}$, $\partial \check{w}_g / \partial \xi$, $\partial \check{w}_g / \partial \mathbf{d}$, $\partial \check{w}_g / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$ und $\partial \check{w}_g / \partial \Delta \theta$ lassen sich mit Hilfe der in Kapitel 5.2.4 erläuterten Gleichungen sowie den Beziehungen (5.164) – (5.172) bestimmen. Die im folgenden angeführten Gleichungen gelten für den viskoplastischen Fall. Bei plastischer Beanspruchung ist entsprechend $p_1 = \pi_1 = 0$ zu setzen.

(A) Berechnung des Terms $\partial \check{w}_g / \partial \mathbf{S}$

Die Zerlegungen (5.137) und (5.127) zusammen mit den Darstellungen (5.166) – (5.170) führen zu

$$\frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial \check{w}_p}{\partial \mathbf{S}} - \frac{\partial \check{e}_{sY}}{\partial \mathbf{S}} - \frac{\partial \check{e}_{sd}}{\partial \mathbf{S}} \ , \quad (\text{C.100})$$

wobei die Ableitungen

$$\frac{\partial \check{w}_p}{\partial \mathbf{S}} = \frac{1}{\rho_R} \frac{\xi_1}{\Delta t} \left\{ \mathbf{N}_1 + \left(\frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \mathbf{S}} \right)^T [\mathbf{S}_1] \right\} \ , \quad (\text{C.101})$$

$$\frac{\partial \check{e}_{sY}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{1}{\rho_R} \frac{\xi_1}{\Delta t} C_{Y_1} \left\{ c_1 \left(\frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \mathbf{S}} \right)^T [\mathbf{Z}_1] + \frac{2}{1-d_1} \boldsymbol{\varrho}^T [\mathbf{Z}_1] \right\} \ , \quad (\text{C.102})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{e}_{sd}}{\partial \mathbf{S}} &= -\frac{1}{\rho_R} \left\{ \frac{\partial (-\check{\Omega}_{et})}{\partial \mathbf{S}} + \frac{(\alpha'_1 \Delta \theta_{r_1} + \alpha_1)}{1-d_1} \theta_1 \mathbf{1} \right\} \dot{\mathbf{d}}_1 + \\ &+ \frac{\dot{e}_{sd_1}}{\dot{\mathbf{d}}_1} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi_1}{\Delta t} \frac{(a_{1_1} + a_{2_1} \mathbf{d}_1)}{(1-d_1)^{q_1}} n_1 (-\Omega_{et_1})^{n_1-1} \frac{\partial (-\check{\Omega}_{et})}{\partial \mathbf{S}} \end{aligned} \quad (\text{C.103})$$

mit

$$\frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{1}{\|(\mathbf{S}_1 - \mathbf{Z}_1)^D\|} \left\{ \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - (\mathbf{N}_1 \otimes \mathbf{N}_1) \right\} \ , \quad (\text{C.104})$$

$$\mathcal{Q}_{ijmn} = Z_{ir} \left(\frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \mathbf{S}} \right)_{rjmn} , \quad (\text{C.105})$$

$$\frac{\partial (-\check{\Omega}_{et})}{\partial \mathbf{S}} = \frac{1}{(1-d_1)^2} \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \mathbf{S}_1^D + \frac{1}{3(2\mu_1+3\lambda_1)} (\text{Sp} \mathbf{S}_1) \mathbf{1} \right\} \quad (\text{C.106})$$

aus den Gleichungen (5.125), (5.126), (5.131), (5.132), (5.134) – (5.136) hervorgehen.

(B) Berechnung des Terms $\partial \check{w}_g / \partial \mathbf{Z}$

Analoge Vorgehensweise liefert zunächst

$$\frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{\partial \check{w}_p}{\partial \mathbf{Z}} - \frac{\partial \check{e}_{sY}}{\partial \mathbf{Z}} - \frac{\partial \check{e}_{sd}}{\partial \mathbf{Z}} , \quad (\text{C.107})$$

bzw. unter Berücksichtigung von (5.125), (5.126), (5.131), (5.132), (5.134), (5.135)

$$\frac{\partial \check{w}_p}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{1}{\rho_R} \frac{\xi_1}{\Delta t} \left(\frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \mathbf{Z}} \right)^T [\mathbf{S}_1] , \quad (\text{C.108})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{e}_{sY}}{\partial \mathbf{Z}} = \frac{1}{\rho_R} C_{Y_1} \left\{ c_1 \dot{\mathbf{Y}}_1 + \frac{\xi_1}{\Delta t} \left(c_1 \left(\frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \mathbf{Z}} \right)^T [\mathbf{Z}_1] - \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{1-d_1} (\mathbf{Z}_1 \mathbf{N}_1 - \check{\mathcal{Q}}^T [\mathbf{Z}_1]) \right) - p_1 \omega_1 \left\| \frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right\|^{w_1-1} \frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.109})$$

$$\frac{\partial \check{e}_{sd}}{\partial \mathbf{Z}} = -\frac{1}{\rho_R} \frac{C_{Y_1}}{1-d_1} \frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \dot{d}_1 , \quad (\text{C.110})$$

$$\frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \mathbf{Z}} = -\frac{\partial \check{\mathbf{N}}}{\partial \mathbf{S}} . \quad (\text{C.111})$$

(C) Berechnung des Terms $\partial \check{w}_g / \partial \mathbf{k}$

Es gilt

$$\frac{\partial \check{w}_g}{\partial \mathbf{k}} = -\frac{\partial \check{e}_{sr}}{\partial \mathbf{k}} - \frac{\partial \check{e}_{sd}}{\partial \mathbf{k}} \quad (\text{C.112})$$

und aufgrund von (5.130), (5.132), (5.133), (5.135)

$$\frac{\partial \check{e}_{sr}}{\partial \mathbf{k}} = \frac{1}{\rho_R} \gamma_1 C_{r_1} \dot{r}_1 - \frac{1}{\gamma_1 (1-d_1)} \frac{\dot{e}_{sr_1}}{\dot{r}_1} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \phi_1 \beta_1 \frac{\xi_1}{\Delta t} + \pi_1 \omega_1 \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-d_1} - h_1 \right)^{\omega_1-1} \right\} , \quad (\text{C.113})$$

$$\frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sd}}{\partial \mathbf{k}} = -\frac{1}{\rho_R (1-d_1)} \left\{ C_{r_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-d_1} - h_1 \right) + \frac{1}{\gamma_1} (h_1 - h'_1 \theta_1) \right\} \dot{\mathbf{d}}_1 . \quad (\text{C.114})$$

(D) Berechnung des Terms $\partial \check{\ddot{w}}_g / \partial \xi$

Die Größe

$$\frac{\partial \check{\ddot{w}}_g}{\partial \xi} = \frac{\partial \check{\ddot{w}}_p}{\partial \xi} - \frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sr}}{\partial \xi} - \frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sY}}{\partial \xi} - \frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sd}}{\partial \xi} , \quad (\text{C.115})$$

mit

$$\frac{\partial \check{\ddot{w}}_p}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho_R} \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{N}_1 , \quad (\text{C.116})$$

$$\frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sr}}{\partial \xi} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\dot{e}_{sr_1}}{\dot{r}_1} \frac{\phi_1}{\Delta t} \left(1 - \frac{\beta_1}{\gamma_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-d_1} - h_1 \right) \right) , \quad (\text{C.117})$$

$$\frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sY}}{\partial \xi} = \frac{1}{\rho_R} \frac{C_{Y_1}}{\Delta t} \mathbf{Z}_1 \cdot \left\{ c_1 \mathbf{N}_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} + 2 \frac{\mathbf{Z}_1}{1-d_1} \mathbf{N}_1 \right\} , \quad (\text{C.118})$$

$$\frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sd}}{\partial \xi} = \frac{\dot{e}_{sd_1}}{\xi_1} \quad (\text{C.119})$$

wird mittels der Beziehungen (5.125), (5.126), (5.130) – (5.135) gewonnen.

(E) Berechnung des Terms $\partial \check{\ddot{w}}_g / \partial \mathbf{d}$

Die Bestimmung von

$$\frac{\partial \check{\ddot{w}}_g}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial \check{\ddot{w}}_{et}}{\partial \mathbf{d}} - \frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sr}}{\partial \mathbf{d}} - \frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sY}}{\partial \mathbf{d}} - \frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sd}}{\partial \mathbf{d}} , \quad (\text{C.120})$$

mit

$$\frac{\partial \check{\ddot{w}}_{et}}{\partial \mathbf{d}} = \frac{1}{\rho_R} C_{t_1} (\text{Sp } \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) , \quad (\text{C.121})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sr}}{\partial \mathbf{d}} = & -\frac{1}{\rho_R} \left(\frac{\gamma'_1}{\gamma_1} h_1 - h'_1 \right) \theta_1 \dot{r}_1 - \\ & - \frac{\dot{e}_{sr_1}}{\dot{r}_1} \frac{\mathbf{k}_1}{\gamma_1 (1-d)^2} \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \phi_1 \beta_1 \frac{\xi_1}{\Delta t} + \pi_1 \omega_1 \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-d_1} - h_1 \right)^{\omega_1 - 1} \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.122})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{\check{e}}_{sY}}{\partial \mathbf{d}} &= \frac{1}{\rho_R} C_{Y_1} \frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \cdot \left\{ \frac{\xi_1}{\Delta t} \left(-\sqrt{\frac{2}{3}} b_1 \frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} + 2 \frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \mathbf{N}_1 \right) - \right. \\ &\quad \left. - p_1 w_1 \left\| \frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right\|^{w_1-1} \frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.123})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{\check{e}}_{sd}}{\partial \mathbf{d}} &= -\frac{1}{\rho_R} \left\{ -2 \Omega_{et_1} + (\alpha'_1 \Delta \theta_{r_1} + \alpha_1) \text{Sp} \left(\frac{\mathbf{S}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right) \theta_1 + C_{r_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} - h_1 \right) \frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\gamma_1} (h_1 - h'_1 \theta_1) \frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} + C_{Y_1} \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right) \right\} \frac{\dot{\mathbf{d}}_1}{1-\mathbf{d}_1} + \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\dot{e}_{sd_1}}{\dot{\mathbf{d}}_1} \frac{\xi_1}{\Delta t} \frac{(-\Omega_{et_1})^{n_1}}{(1-\mathbf{d}_1)^{q_1}} \left\{ a_{0_1} + (a_{1_1} + a_{2_1} \mathbf{d}_1) \frac{(q_1 + 2 n_1)}{1-\mathbf{d}_1} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.124})$$

erfolgt entsprechend unter Einbeziehung von (5.123), (5.130) – (5.135).

(F) Berechnung des Terms $\partial \check{\check{w}}_g / \partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}$

Es folgt

$$\frac{\partial \check{\check{w}}_g}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial \check{\check{w}}_{et}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} , \quad (\text{C.125})$$

bzw. mit (5.123)

$$\frac{\partial \check{\check{w}}_{et}}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}} = -\frac{1}{\rho_R} (1-\mathbf{d}_1) C_{t_1} \mathbf{1} . \quad (\text{C.126})$$

(G) Berechnung des Terms $\partial \check{\check{w}}_g / \partial \Delta \theta$

Für den Ausdruck

$$\frac{\partial \check{\check{w}}_g}{\partial \Delta \theta} = \frac{\partial \check{\check{w}}_{et}}{\partial \Delta \theta} - \frac{\partial \check{\check{e}}_{sr}}{\partial \Delta \theta} - \frac{\partial \check{\check{e}}_{sY}}{\partial \Delta \theta} - \frac{\partial \check{\check{e}}_{sd}}{\partial \Delta \theta} \quad (\text{C.127})$$

ergeben sich gemäß (5.123), (5.124), (5.130) – (5.135) folgende Zusammenhänge:

$$\frac{\partial \check{\check{w}}_{et}}{\partial \Delta \theta} = -\frac{1}{\rho_R} (1-\mathbf{d}_1) (C_{t_1})' (\text{Sp} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}) , \quad (\text{C.128})$$

$$\frac{\partial \check{\check{e}}_{sr}}{\partial \Delta \theta} = -\frac{(1-\mathbf{d}_1)}{\rho_R} C_{r_1} \left\{ \gamma'_1 \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} - h_1 \right) + \gamma_1 h'_1 \right\} \dot{r}_1 + \frac{\dot{e}_{sr_1}}{\dot{r}_1} \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial \Delta \theta} , \quad (\text{C.129})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sY}}{\partial \Delta \theta} &= \frac{1}{\rho_R} C_{Y_1} \mathbf{Z}_1 \cdot \left\{ -2 c'_1 \dot{\mathbf{Y}}_1 + \frac{\xi_1}{\Delta t} \left(c'_1 \mathbf{N}_1 - \sqrt{\frac{2}{3}} b'_1 \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(p'_1 + p_1 \ln \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right) w'_1 \right) \left\| \frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right\|^{w-1} \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right) \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.130})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \check{\ddot{e}}_{sd}}{\partial \Delta \theta} &= -\frac{1}{\rho_R} \left\{ \frac{\partial(-\check{\Omega}_{et})}{\partial \Delta \theta} + (2 \alpha'_1 \theta_1 + \alpha'_1 \Delta \theta_{r_1} + \alpha_1) \text{Sp} \left(\frac{\mathbf{S}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right) - \right. \\ &\quad - \left(\frac{1}{\gamma_1} (h_1 - h'_1 \theta_1) + C_{r_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} - h_1 \right) \right) \left(h'_1 + \frac{\gamma'_1}{\gamma_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} - h_1 \right) \right) - \\ &\quad \left. - C_{Y_1} \frac{c'_1}{c_1} \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{Z}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right) \right\} \dot{\mathbf{d}}_1 + \frac{\dot{e}_{sd_1}}{\dot{\mathbf{d}}_1} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_1}{\partial \Delta \theta} \end{aligned} \quad (\text{C.131})$$

mit

$$(C_{t_1})' = \frac{3}{\Delta t} \{ (\kappa'_1 \theta_1 + \kappa_1) (\alpha'_1 \Delta \theta_{r_1} + \alpha_1) + 2 \kappa_1 \alpha'_1 \theta_1 \} , \quad (\text{C.132})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{r}_1}{\partial \Delta \theta} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi_1}{\Delta t} \left\{ \frac{\phi_1}{\gamma_1} \left(\left(\frac{\beta_1}{\gamma_1} \gamma'_1 - \beta'_1 \right) \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} - h_1 \right) + \beta_1 h'_1 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \phi'_1 \left(1 - \frac{\beta_1}{\gamma_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} - h_1 \right) \right) \right\} + \frac{\pi_1 \omega_1}{\gamma_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} - h_1 \right)^{\omega_1-1} h'_1 - \\ &\quad - \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} - h_1 \right)^{\omega_1} \left(\pi'_1 - \frac{\pi_1}{\gamma_1} \gamma'_1 + \pi_1 \ln \left(\frac{\mathbf{k}_1}{1-\mathbf{d}_1} - h_1 \right) \omega'_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.133})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\mathbf{d}}_1}{\partial \Delta \theta} &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\xi_1}{\Delta t} \left\{ (a_0)'_1 + \frac{(-\Omega_{et_1})^{n_1}}{(1-\mathbf{d}_1)^{q_1}} \left((a_1)'_1 + (a_2)'_1 \mathbf{d}_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (a_{1_1} + a_{2_1} \mathbf{d}_1) \left(\ln(-\Omega_{et_1}) n'_1 - \ln(1-\mathbf{d}_1) q'_1 + \frac{n_1}{(-\Omega_{et_1})} \frac{\partial(-\check{\Omega}_{et})}{\partial \Delta \theta} \right) \right) \right\} , \end{aligned} \quad (\text{C.134})$$

$$\frac{\partial(-\check{\Omega}_{et})}{\partial \Delta \theta} = -\frac{\mu'_1}{4 \mu_1^2} \left(\frac{\mathbf{S}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right)^D \cdot \left(\frac{\mathbf{S}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right)^D - \frac{(2 \mu'_1 + 3 \lambda'_1)}{6 (2 \mu_1 + 3 \lambda_1)^2} \left(\text{Sp} \left(\frac{\mathbf{S}_1}{1-\mathbf{d}_1} \right) \right)^2 . \quad (\text{C.135})$$