

Zur näherungsweise Berechnung des Fixpunktes einer Kontraktion durch ein Einschließungsverfahren

Götz Alefeld und Peter Volkmann

Zusammenfassung. Es wird eine Modifikation eines Einschließungsverfahrens gegeben, mit welchem der Fixpunkt einer Kontraktion $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ näherungsweise berechnet werden kann; pro Iterationsschritt wird nun weniger Aufwand benötigt. Die Güte der Einschließung wird aber nicht besser, sondern kann schlechter werden.

1. Vorbereitende Tatsachen. Im \mathbb{R}^N sei $\|x\| = \max\{|x^1|, \dots, |x^N|\}$, und $x_1 \leq x_2$ bedeute $x_1^k \leq x_2^k$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Die Funktion

$$F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \tag{1}$$

genüge einer Lipschitzbedingung

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| \leq \kappa \|x_1 - x_2\|. \tag{2}$$

Nach Jahn [1] und nach [3], [4] existiert dann

$$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N \tag{3}$$

mit den Eigenschaften

$$\|f(y_1, z_1) - f(y_2, z_2)\| \leq \kappa \max\{\|y_1 - y_2\|, \|z_1 - z_2\|\}, \tag{4}$$

$$f(y_1, z_1) \leq f(y_2, z_2) \quad (y_1 \leq y_2, z_2 \leq z_1), \tag{5}$$

$$f(x, x) = F(x). \tag{6}$$

Es sei noch

$$\kappa < 1, \tag{7}$$

d. h., die Funktion (1) sei eine Kontraktion. Die Bestimmung einer handlichen Funktion (3) mit den Eigenschaften (4)-(6) kann im konkreten Falle schwierig sein; es geht manchmal leichter, wenn man (unter Beibehaltung von (7)) die Zahl κ etwas vergrößert.

Ab jetzt werden (1)-(7) vorausgesetzt, und es seien y_0, z_0 Elemente des \mathbb{R}^N mit

$$y_0 \leq z_0, \quad y_0 \leq f(y_0, z_0), \quad f(z_0, y_0) \leq z_0,$$

d. h. (vgl. (5)),

$$y_0 \leq f(y_0, z_0) \leq f(z_0, y_0) \leq z_0 \quad (8)$$

(solche y_0, z_0 lassen sich leicht finden). Dann ist bekannt (und es läßt sich ohne weiteres beweisen, vgl. z. B. Kurpel' und Šuvar [2]), daß das Iterationsverfahren

$$y_{n+1} = f(y_n, z_n), \quad z_{n+1} = f(z_n, y_n) \quad (9)$$

einschließend gegen den Fixpunkt x_0 von F konvergiert; insbesondere gilt also

$$y_0 \leq x_0 \leq z_0. \quad (10)$$

2. Das modifizierte Verfahren. Es sei $\varepsilon > 0$; ferner seien y_0, z_0 in \mathbb{R}^N vorgelegt, so daß (8) gilt. Wir geben eine Modifikation von (9) an, durch welche a, b in \mathbb{R}^N mit den Eigenschaften

$$a \leq x_0 \leq b, \quad \|b - a\| \leq \varepsilon \quad (11)$$

gefunden werden können: Mit $f = (f^1, \dots, f^N)$ seien y_n, z_n gegeben durch

$$y_{n+1}^k = \begin{cases} f^k(y_n, z_n) & \text{für } z_n^k - y_n^k > \varepsilon \\ y_n^k & \text{für } z_n^k - y_n^k \leq \varepsilon, \end{cases} \quad (12)$$

$$z_{n+1}^k = \begin{cases} f^k(z_n, y_n) & \text{für } z_n^k - y_n^k > \varepsilon \\ z_n^k & \text{für } z_n^k - y_n^k \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (13)$$

Diese Rekursion werde durchgeführt, bis

$$y_{m+1} = y_m, \quad z_{m+1} = z_m \quad (14)$$

eintritt; $a = y_m, b = z_m$ erfüllen dann (11). Bedingung (14) gilt sicher für

$$m \geq \frac{\ln \|z_0 - y_0\| - \ln \varepsilon}{-\ln \kappa}. \quad (15)$$

Beweis. Man betrachte (12), (13) zunächst für $n = 0$. Aus (8), (12) folgt

$$y_0 \leq y_1 \leq f(y_0, z_0),$$

und analog folgt aus (8), (13)

$$f(z_0, y_0) \leq z_1 \leq z_0.$$

Mit (8) wird so

$$y_0 \leq y_1 \leq f(y_0, z_0) \leq f(z_0, y_0) \leq z_1 \leq z_0, \quad (16)$$

und hieraus ergibt sich mit (5)

$$y_1 \leq f(y_0, z_0) \leq f(y_1, z_1) \leq f(z_1, y_1) \leq f(z_0, y_0) \leq z_1,$$

also gilt

$$y_1 \leq f(y_1, z_1) \leq f(z_1, y_1) \leq z_1.$$

Das ist (8) mit y_1, z_1 an Stelle von y_0, z_0 , und entsprechend kann für alle $n \geq 0$ auf

$$y_n \leq f(y_n, z_n) \leq f(z_n, y_n) \leq z_n$$

geschlossen werden. Analog zu (10) gilt dann $y_n \leq x_0 \leq z_n$, und analog zu (16) erhält man $y_n \leq y_{n+1} \leq z_{n+1} \leq z_n$. Insgesamt haben wir

$$y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq x_0 \leq \dots \leq z_2 \leq z_1 \leq z_0. \quad (17)$$

Aus (12), (13) in Verbindung mit (4) erhält man

$$\|z_{n+1} - y_{n+1}\| \leq \max\{\varepsilon, \kappa \|z_n - y_n\|\},$$

also gilt für alle $m \geq 0$ die Abschätzung

$$\|z_m - y_m\| \leq \max\{\varepsilon, \kappa^m \|z_0 - y_0\|\}.$$

Für m gemäß (15) ergibt sich dann

$$\|z_m - y_m\| \leq \varepsilon, \quad (18)$$

und hieraus folgen mit (12), (13), (17) die Beziehungen

$$y_0 \leq y_1 \leq \dots \leq y_m = y_{m+1} = \dots \leq x_0 \leq \dots = z_{m+1} = z_m \leq \dots \leq z_1 \leq z_0. \quad (19)$$

Ist andererseits irgendein $m \geq 0$ vorgelegt, mit welchem (14) gilt, so stellt sich wieder (19) ein, und (18) ist erfüllt (denn $\|z_n - y_n\| \leq \varepsilon$ gilt nach dem vorher Gesagten sicher für große n). Wegen (18), (19) gilt also (11) für $a = y_m$, $b = z_m$.

3. Vergleich mit dem Iterationsverfahren (9). Mit (12), (13) ergibt sich also die Zeile (17):

$$y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq x_0 \leq \dots \leq z_2 \leq z_1 \leq z_0.$$

Um vergleichen zu können, schreiben wir (9) in der Form

$$\tilde{y}_{n+1} = f(\tilde{y}_n, \tilde{z}_n), \quad \tilde{z}_{n+1} = f(\tilde{z}_n, \tilde{y}_n) \quad (\tilde{y}_0 = y_0, \tilde{z}_0 = z_0).$$

Man erhält dann

$$y_0 = \tilde{y}_0 \leq \tilde{y}_1 \leq \tilde{y}_2 \leq \dots \leq x_0 \leq \dots \leq \tilde{z}_2 \leq \tilde{z}_1 \leq \tilde{z}_0 = z_0, \quad (20)$$

und es gilt stets

$$y_n \leq \tilde{y}_n \leq x_0 \leq \tilde{z}_n \leq z_n.$$

Somit liefert (20) eine bessere (genauer: nicht schlechtere) Einschließung von x_0 als (17). Dennoch ist das Verfahren (12), (13) im Vergleich zu (9) attraktiv, da es weniger (genauer: nicht mehr) Rechenaufwand pro Iterationsschritt erfordert, ansonsten aber den Fixpunkt ebenfalls monoton einschließt.

Literatur

[1] Jahn Karl-Udo: *Existenz und Einschließung der bezüglich der Inklusion maximalen Lösung bei Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen*. Wiss. Beitr. M.-Luther-Univ. Halle-Wittenberg **1984**, M33, 55-58 (1984).

[2] Kurpel' N. S., Šuvar B. A.: *Dvustoronnie operatornye neravenstva i ih primenenija*. Naukova Dumka Kiev 1980.

[3] Volkmann Peter: *Einschließung der Lösungen von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen*. International Series of Numerical Mathematics 71, Birkhäuser Basel, 351-357 (1984).

[4] — (Fol'kmann P.): *Zametka ob integral'nyh neravenstvah tipa Vol'terra*. Ukrain. Mat. Žurn. **36**, 393-395 (1984).

Herstellung des Typoskripts: Marion Ewald.

Adressen der Autoren:

G. Alefeld, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Deutschland. (Goetz.Alefeld@mathematik.uni-karlsruhe.de)

P. Volkmann, Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Deutschland.