



Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt

Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5718

**Finite Elemente Simulationen
zur Auswirkung von
Imperfektionen auf das
Versagensverhalten elastisch-
plastischer Druckbehälter**

B. Ritter

Institut für Materialforschung

März 1996

**Forschungszentrum Karlsruhe
Technik und Umwelt**

**Wissenschaftliche Berichte
FZKA 5718**

**Finite Elemente Simulationen zur
Auswirkung von Imperfektionen auf das
Versagensverhalten elastisch-plastischer
Druckbehälter**

**Bernd Ritter
Institut für Materialforschung**

Von der Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe
1996**

**Als Manuskript gedruckt
Für diesen Bericht behalten wir uns alle Rechte vor**

**Forschungszentrum Karlsruhe GmbH
Postfach 3640, 76021 Karlsruhe**

ISSN 0947-8620

Kurzfassung

Mit Hilfe des Finite Elemente Programms ABAQUS, Version 4.9, wurden die Auswirkungen von lokalen, zumeist thermischen Imperfektionen auf das Versagensverhalten elasto-plastischer Druckbehälter analysiert. Im Vordergrund stand hierbei die Geometrie eines Druckwasserreaktors. Im Rahmen der Theorie großer Deformationen wurde mit dem in ABAQUS standardmäßig implementierten Thermoplastizitätsmodell für kleine elastische und große plastische Deformationen Versagen durch plastische Instabilität berechnet. Da das nachkritische Verformungsverhalten des Behälters von Interesse war, galt es zu überprüfen, ob es sich hierbei um ein Verzweigungsproblem handeln könnte.

Auf der Grundlage der Axialsymmetrie und unter der Annahme kosinusförmiger Eigenmoden ist für die durch Innendruck belastete Kugel der niedrigste Bifurkationsmodus durch $k = 1$ gegeben, wobei die Stabilität deutlich vor der Eindeutigkeit verloren geht. Nach beginnender Entlastung ist das nachkritische Verformungsverhalten dadurch gekennzeichnet, daß bei weiterer Zunahme des Innenvolumens weiterhin große Bereiche der Kugel plastisch belastet werden, ohne jedoch eine Einschnürung am Pol zu zeigen. Für $k = 2$ wurde erst bei einem relativ hohen Innenvolumen eine Verzweigung von der fundamentalen Lösung ermittelt, obwohl der maximal ertragbare Innendruck niedriger war als beim niedrigsten Bifurkationsmodus. Nach Erreichen jenes Innendrucks, bei dem zum erstenmal Entlastungen ermittelt wurden, führte im Falle $k = 2$ eine weitere Zunahme des Innenvolumens zu einer sofortigen Einschnürung am Äquator. Bei der Variation der Lage lokaler Imperfektionen $\varphi_0 = [0, \pi/2]$ zeigte sich eine kontinuierliche Abnahme des maximal ertragbaren Innendrucks für zunehmende φ_0 . Im nachkritischen Bereich zeigte sich diese Tendenz jedoch nicht, obwohl sich Imperfektionen besonders im nachkritischen Bereich stark hätten auswirken sollen. Für hinreichend große φ_0 wurde die Kugel zu einer typischen Modus-1-Verformung angeregt. Daraus wurde gefolgert, daß das nachkritische Verformungsverhalten einer mit Innendruck beaufschlagten Kugel auf der Basis der Axialsymmetrie nicht realistisch simuliert werden kann.

Zur einer ähnlichen Schlußfolgerung führten die Untersuchungen zum Reaktordruckbehälter. Es zeigte sich, daß bei Vorgabe einer axialsymmetrischen Störung im Pol mit verschwindender Amplitude die fundamentale Lösung des Behälters angenähert wird, wodurch gezeigt wurde, daß es sich hierbei um kein axialsymmetrisches Verzweigungsproblem handeln kann. Eine abseits des Pols vorgegebene punktförmige Imperfektion führt ab einer kritischen Amplitude zur Verformungslokalisierung am Ort der Imperfektion. Dies stellt jedoch kein Verzweigungsproblem im eigentlichen Sinne dar. Lediglich im Pol ist mit einem Verzweigungsproblem relativ zur Umfangsrichtung zu rechnen.

Zum Abschluß wurden auf der Grundlage der aus Zugversuchen identifizierten Materialparameter einige Tragfähigkeitsanalysen für den Reaktordruckbehälter durchgeführt. Es ergab sich eine starke Abhängigkeit des maximal ertragbaren Innendrucks von der Lage und Größe der Wärmeeinflußzone.

Abstract

Investigation of the Influence of Imperfections on the Failure Behavior of Elastic-plastic Pressure Vessels by Means of the Finite Element Method

The influence of local, mostly thermal imperfections on the failure behavior of elastic-plastic pressure vessels was investigated with the ABAQUS Finite Element code (version 4.9). The geometry of a reactor pressure vessel was in the center of the discussion. Failure due to plastic instability was studied using the standard thermo-plasticity model for small elastic and finite plastic deformations. As the post-critical deformation behavior of the vessel was of interest, it had to be considered whether a bifurcation problem could occur.

For axisymmetric spherical shells subjected to internal pressure p , and under the assumption of cosinusoidal eigenmodes, the first bifurcation mode is given by $k = 1$. Compared to the point of maximum internal pressure, bifurcation (characterized by neutral loading) occurs with a greater enclosed volume. The post-bifurcation behavior is characterized by a large plastic zone in the spherical shell. No strain localization was determined at the thinner pole of the shell. For $k = 2$ bifurcation occurred at a relatively large enclosed volume, although the maximum internal pressure p_{max} was lower than for the first bifurcation mode. After neutral loading has been reached, increase in enclosed volume leads to rapid strain localization at the equator of the imperfect shell. For local imperfections $\varphi_0 = [0, \pi/2]$ p_{max} decreased with increasing φ_0 . This tendency was not obtained for the post-critical behavior, although the imperfection sensitivity should have been high. For sufficiently high values of φ_0 the sphere showed a typical mode-1 deformation. It was concluded that the post-critical behavior of the sphere cannot be calculated under axisymmetrical conditions.

Similar results were obtained for the reactor pressure vessel (RPV). For axisymmetrical imperfections located at the pole of the vessel the fundamental solution was approximated with vanishing imperfections. Thus, no axisymmetrical bifurcation can occur.

For non axisymmetrical imperfections (hot spots located outside the pole of the vessel) strain localization resulted for sufficiently high amplitudes. Due to the fact that a minimum (non vanishing) imperfection is necessary for strain localization, no bifurcation occurs within the meaning of the bifurcation theory. Solely a bifurcation problem is expected to appear at the pole of the vessel relative to the circumferencial direction.

On the basis of temperature dependent material parameters several analyses of the load-carrying capacity were performed for the RPV geometry. The parameters were identified with uniaxial tensile tests. The two- and three-dimensional Finite Element analyses indicated a strong dependency of the maximum internal pressure on the size and location of the heat affected zone.

Inhaltsverzeichnis

Notation und Operatoren	IV
1 Einleitung	1
2 Allgemeine Grundlagen der Mechanik	4
2.1 Kinematik des deformierbaren Körpers	4
2.2 Verzerrungstensoren	7
2.3 Spannungsvektoren und Spannungstensoren	9
2.4 Überlagerung von Starrkörperbewegungen	12
2.5 Die Spannungsleistung	13
3 Beschreibung des Materialverhaltens	15
3.1 Darstellung des Materialgesetzes	15
3.2 Materielle Objektivität	16
3.3 Methode der konjugierten Variablen	18
4 Erläuterungen zur Plastizität	20
4.1 Plastizitätsmodell mit isotroper Verfestigung	20
4.2 Das Plastizitätsmodell in ABAQUS	24
5 Erläuterungen zur Stabilität und zum Verlust der Eindeutigkeit	28
5.1 Das Shanley-Modell	28
5.1.1 Modellgleichungen	30
5.1.2 Elastisches Knicken	31
5.1.3 Plastisches Knicken	32
5.1.4 Elastisch-plastisches Knicken	32

5.1.5	Einfluß von Imperfektionen	36
5.1.6	Schlußfolgerungen	36
5.2	Verzweigung bei elastisch-plastischen Körpern	37
5.3	Stabilität bei elastisch-plastischen Körpern	43
5.4	Abschließende Bemerkungen	44
6	Untersuchungen am Zugstab	45
6.1	Einführende Bemerkungen	45
6.2	Der Zugversuch	46
6.2.1	Kinematische Beziehungen	47
6.2.2	Die Instabilitätsbedingung	49
6.2.3	Der Verlust der Eindeutigkeit	49
6.3	FE-Rechnungen	50
6.3.1	Allgemeines	50
6.3.2	Diskretisierung	52
6.3.3	Globale Imperfektionen	52
6.3.4	Lokale geometrische Imperfektionen	57
6.3.5	Thermische Imperfektionen	59
6.3.6	Schlußfolgerungen	63
7	Kugel unter Innendruck	64
7.1	Einführung in das Kapitel	64
7.2	FE-Rechnungen	65
7.2.1	Diskretisierung	65
7.2.2	Globale Imperfektionen	67
7.2.3	Lokale geometrische Imperfektionen	71
7.2.4	Lokale thermische Imperfektionen	74
7.3	Schlußfolgerungen	79

<i>Inhaltsverzeichnis</i>	III
8 Untersuchungen zum Reaktordruckbehälter (Teil 1)	81
8.1 Der Reaktordruckbehälter	81
8.2 Axialsymmetrische Geometrie	82
8.2.1 Diskretisierung	82
8.2.2 Globale Imperfektionen	83
8.2.3 Lokale thermische Imperfektionen	86
8.3 Dreidimensionale Geometrie	90
8.3.1 Diskretisierung	90
8.3.2 Punktförmige thermische Imperfektionen	90
9 Reaktordruckbehälter (Teil 2)	93
9.1 Einführung in das Kapitel	93
9.2 Bestimmung der Materialparameter	93
9.3 Einfluß thermischer Imperfektionen	98
9.3.1 Axialsymmetrische Geometrie	98
9.3.2 Dreidimensionale Geometrie	102
10 Zusammenfassung	104
Anhang A	108
Anhang B	110
Literaturverzeichnis	113

Notation und Operatoren

Tensoren erster und zweiter Stufe werden in Fettdruck dargestellt, Tensoren vierter Stufe werden zusätzlich noch durch kalligrafische Buchstaben gekennzeichnet. Gleichungen in Indexschreibweise unterliegen der Einstein'schen Summationskonvention. Die verwendeten Rechenregeln können den Lehrbüchern von DE BOER [4] und KLINGBEIL [37] entnommen werden.

Notation

$\hat{\cdot}, -$	Funktionssymbole
$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)$	Ortsvektor eines materiellen Punktes in der Momentankonfiguration, dem in der Referenzkonfiguration der Vektor \mathbf{X} zugeordnet ist
t	Zeit
$d\mathbf{X}$	Materielles Linienelement in der Referenzkonfiguration
$d\mathbf{x}$	Materielles Linienelement in der Momentankonfiguration
$\mathbf{1}$	Einheitstensor zweiter Stufe
$\mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, t)$	Verschiebungsvektor
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{R}	Rotationstensor in der polaren Zerlegung
\mathbf{U}	Rechts-Strecktensor
\mathbf{V}	Links-Strecktensor
λ_i	Eigenwerte von \mathbf{U} bzw. \mathbf{V}
\mathbf{u}_i	Normierter Eigenvektor von \mathbf{U} zum Eigenwert λ_i
\mathbf{v}_i	Normierter Eigenvektor von \mathbf{V} zum Eigenwert λ_i
$\Omega_{\mathbf{u}}, \Omega_{\mathbf{v}}$	Antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe, die die Eigenvektoren \mathbf{u}_i bzw. \mathbf{v}_i in deren zeitliche Ableitung überführen
\mathbf{L}	Räumlicher Geschwindigkeitsgradient
\mathbf{D}	Symmetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten
\mathbf{W}	Antisymmetrischer Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten (Wirbeltensor)

\mathbf{E}	Green'scher Verzerrungstensor
$\tilde{\mathbf{E}}$	Linearisierter Verzerrungstensor
\mathbf{A}	Almansi'scher Verzerrungstensor
$(\ln \mathbf{V})$	Logarithmischer Verzerrungstensor
$d\mathbf{k}$	Differentieller Kraftvektor der Momentankonfiguration
$d\mathbf{K}$	Differentieller Kraftvektor der Referenzkonfiguration
da	Gerichtetes Flächenelement der Momentankonfiguration
dA	Gerichtetes Flächenelement der Referenzkonfiguration
\mathbf{n}	Einheitsnormale des differentiellen Flächenelements da
\mathbf{N}	Einheitsnormale des differentiellen Flächenelements dA
\mathbf{t}	Spannungsvektor
\mathbf{T}	Cauchy'scher Spannungstensor
\mathbf{S}	Gewichteter Cauchy'scher Spannungstensor
\mathbf{T}_R	1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
$\tilde{\mathbf{T}}$	2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor
W	Spannungsleistung pro Volumeneinheit der Bezugskonfiguration
\mathcal{C}	Isotroper Tensor vierter Stufe des Materialgesetzes
\mathcal{M}	Inverse von \mathcal{C}
\mathcal{I}	Einheitstensor 4. Stufe
E	Elastizitätsmodul
ν	Querkontraktionszahl
s	Plastische Bogenlänge
k	Isotrope Verfestigungsvariable
θ	Temperatur
σ_n	Nennspannung (technische Spannung)
e	Totaldehnung (technische Dehnung)
$R_{e,s}$	Streckgrenze
R_m	Zugfestigkeit

σ	Wahre Spannung
ε	Wahre (logarithmische) Dehnung
σ_y	Fließgrenze
F, P	Kräfte (Beträge)
p	Innendruck
μ, λ	Lamésche Elastizitätskonstanten

Indizes

$(\cdot)_e$	Elastischer Anteil von (\cdot)
$(\cdot)_p$	Plastischer Anteil von (\cdot)
$(\cdot)_m, (\cdot)_{max}$	Wert von (\cdot) beim Maximalwert der Zugkraft oder des Innendrucks
$(\cdot)_E$	Wert von (\cdot) bei beginnender Entlastung
$(\cdot)^f, (\cdot)^{(1)}$	Wert von (\cdot) für die fundamentale Lösung
$(\cdot)^{(2)}$	Wert von (\cdot) für eine zweite, mögliche Lösung
$(\cdot)_L$	Wert von (\cdot) für den linearen Vergleichskörper

Operatoren

$GRAD$	Gradient (bezüglich der Referenzkonfiguration)
$grad$	Gradient (bezüglich der Momentankonfiguration)
DIV	Divergenz (bezüglich der Referenzkonfiguration)
$Sp \mathbf{A}$	Spur des Tensors zweiter Stufe \mathbf{A}
$det \mathbf{A}$	Determinante des Tensors zweiter Stufe \mathbf{A}
$\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3} Sp \mathbf{A}$	Deviator des Tensors zweiter Stufe \mathbf{A}
$\sup(\cdot)$	Supremum von (\cdot)
$(\cdot)'$	Materielle Zeitableitung von (\cdot)
$(\cdot)^{-1}$	Inverse von (\cdot)
$(\cdot)^T$	Transponierte von (\cdot)

$\dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}} - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W}$ Jaumann-Ableitung des Tensors zweiter Stufe \mathbf{A}

$\mathcal{A}[\mathbf{B}]$ Anwendung des Tensors vierter Stufe \mathcal{A} auf den Tensor zweiter Stufe \mathbf{B}

$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ Dyadisches Produkt zweier Tensoren zweiter Stufe

$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ Dyadisches Produkt zweier Vektoren

$\mathbf{A} \mathbf{B}$ Multiplikative Verknüpfung zweier Tensoren zweiter Stufe

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{Sp} \mathbf{A}\mathbf{B}^T$ Skalarprodukt zweier Tensoren zweiter Stufe

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ Skalarprodukt zweier Vektoren

Einige wichtige Rechenregeln

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{Sp} \mathbf{A}\mathbf{B}^T = \text{Sp} \mathbf{A}^T\mathbf{B} = \text{Sp} \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \text{Sp} \mathbf{B}\mathbf{A}^T$$

$$\frac{\partial(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})}{\partial \mathbf{T}} = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{T}} \right)^T [\mathbf{B}] + \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{T}} \right)^T [\mathbf{A}]$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) [\mathbf{C}] = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \mathbf{A} \Rightarrow (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) [\mathbf{A}] = (\text{Sp} \mathbf{A}) \mathbf{1}$$

Kapitel 1

Einleitung

Ziel dieser Arbeit war es, die Auswirkungen von Imperfektionen auf das Versagensverhalten von elastisch-plastischen Druckbehältern mit Hilfe des Finite Elemente Programms ABAQUS [22], Version 4.9, auf der Grundlage der Theorie großer Deformationen zu untersuchen. Von besonderem Interesse ist das Verhalten eines Reaktordruckbehälters (RDB), dessen kugelförmige Bodenkalotte mit axialsymmetrischen und lokalen Temperaturimperfektionen beaufschlagt wird. Die durchgeführten Untersuchungen sollen zum genaueren Verständnis des möglichen Versagensablaufs nach schweren Kernschmelzunfällen beitragen. Bei diesen Unfallszenarien wird davon ausgegangen, daß sich das Corium ins untere Plenum des Behälters verlagert und den Behälter lokal aufheizt, wie dies beispielsweise beim Unfall im Block 2 des Kraftwerks Three Miles Island (TMI-2) bei Harrisburg im Jahre 1979 der Fall war [63, 59], oder einen großvolumigen Schmelzesee ausbildet. Nicht zuletzt durch den Vorfall in Harrisburg und dem schweren Unfall in Tschernobyl im Jahre 1986 wurden und werden zahlreiche Untersuchungen zum Thema schwere Kernschmelzunfälle durchgeführt, in denen unterschiedliche Gesichtspunkte im Vordergrund stehen.

Im Hinblick auf die vorliegende Arbeit seien der Beitrag von ALEX ET AL. [1] zur Deutschen Risikostudie Phase B [16] erwähnt, in der die Auswirkungen einer axialsymmetrischen Temperaturverteilung auf das zeitabhängige Verformungsverhalten der axialsymmetrischen Behälter-schale mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente berechnet wurde. Der Versagenszeitpunkt wurde mit Hilfe eines einfachen Versagenskriteriums bestimmt. In der sehr umfangreichen Studie von REMPE ET AL. [54] wurde unter anderem der Einfluß verschiedener Schmelze-zusammensetzungen auf den Versagenszeitpunkt des Behälters, ebenfalls auf der Basis von axialsymmetrischen Finite Elemente Berechnungen, abgeschätzt. Obwohl in beiden Studien die FE-Rechnungen ebenfalls auf der Grundlage der Theorie großer Deformationen durchgeführt wurden, ergab sich kein instabiles Verhalten des Behälters.

Aus der Literatur ist bekannt, daß bei kugelförmigen oder langen, zylindrischen Druckbehältern nach Erreichen eines kritischen Zustandes der Behälter instabil wird und bei weiterer Zunahme

des Innenvolumens die Eindeutigkeit der Lösung verloren geht. Dieser Verlust der Eindeutigkeit (Bifurkation, Verzweigung) bedeutet, daß unter der Voraussetzung einer perfekten Bauteilgeometrie, ab einer kritischen Last (Bifurkationslast) zwei verschiedene Lösungen denkbar sind. Die eine Lösung ist die fundamentale Lösung, die das nachkritische Verformungsverhalten der perfekten Geometrie beschreibt. Die zweite Lösung, die als verzweigte Lösung bezeichnet wird, ist dadurch gekennzeichnet, daß mindestens ein materieller Punkt eine andere Belastungstrajektorie durchläuft als bei der fundamentalen Lösung.

Bekanntere Beispiele für Verzweigungsprobleme sind das Knicken und Beulen¹ schlanker Strukturen, die auf Druck belastet werden sowie die Einschnürung eines Zugstabs. Während bei letzterem die zu beobachtende Verformungslokalisierung erst nach Erreichen der Zugfestigkeit eintritt, können lange, dünne bzw. dünnwandige Strukturen knicken oder beulen, noch bevor die aus dieser Last berechnete Vergleichsspannung die Fließgrenze erreicht².

Bei der Auslegung schlanker, durch Druckspannungen belastete Konstruktionen kann somit die Knick- oder Beullast die zur Dimensionierung erforderliche kritische Belastungsgröße sein. Aus diesem Grund existiert eine Vielzahl von Literatur, die sich sehr intensiv mit dem Knicken und Beulen von Strukturen und der Bestimmung der kritischen Lasten beschäftigt³.

Die bei auf Zug beanspruchten, duktilen Bauteilen häufig zu beobachtende Verformungslokalisierung ist im allgemeinen für die Auslegung nicht von Bedeutung, da im Extremfall die Tragfähigkeitsgrenze den kritischen Zustand darstellt. Bei der Bestimmung des *Versagensablaufs* kann jedoch die Frage nach den maximalen Verformungen von Interesse sein, bevor die Integrität des Bauteils verloren geht, da sich in unmittelbarer Umgebung befindliche Strukturen eventuell eine (stabilisierende) Stützwirkung ausüben könnten.

Um die Begriffe Stabilität und Verzweigung genauer erläutern zu können, werden dazu zuerst in den Kapiteln 2 und 3 die Grundlagen der Kontinuumsmechanik und der Materialtheorie dargelegt. Auf die Grundlagen der Methode der Finiten Elemente wird in diesem Zusammen-

¹Es ist streng zwischen dem durch Druckspannungen induzierten Beulen (engl. buckling) und dem durch Zugspannungen induzierten Beulen (engl. bulging) zu unterscheiden.

²Es sei erwähnt, daß aufgrund ungünstiger Bauteilgeometrien das Beulen oder Knicken auch mit äußeren Lasten einher gehen kann, die rein intuitiv nur Zugspannungen im Bauteil induzieren. Beispielsweise können nichthalbkugelförmige, dünnwandige Deckel von durch Innendruck belasteten Behältern aufgrund induzierter Druckspannungen beulen (s. BUSHNELL [9, S. 92 ff]).

³In den zum Teil sehr ausführlichen Veröffentlichungen von BUSHNELL [9], SEWELL [61], THOMPSON / HUNT [68] und HUTCHINSON / KOITER [27] sind zusätzlich umfangreiche Literaturhinweise zu diesem Thema zu finden.

hang mit dem Verweis auf die entsprechende Fachliteratur (z.B. [2, 81]) nicht eingegangen. In Kapitel 4 wird neben dem in ABAQUS standardmäßig implementierten Materialmodell der Thermoplastizität jenes Plastizitätsmodell erläutert, das in der Literatur zur Herleitung der Stabilitäts- und Verzweigungsbedingungen verwendet wurde.

In Kapitel 5 werden anhand eines einfachen mechanischen Ersatzmodells (Shanley-Modell) die wesentlichen Eigenschaften elastisch-plastischer Bauteile demonstriert und die Verallgemeinerung auf elastisch-plastischer Körper erläutert.

In den darauffolgenden Kapiteln wird für den Zugstab und für die Kugel unter Innendruck der Einfluß von Imperfektionen aufgezeigt, einander gegenübergestellt und möglichst häufig der Vergleich mit den aus der Literatur bekannten Ergebnissen gezogen. Die Kapitel 8 und 9 befassen sich schließlich mit dem RDB selbst. Es werden anhand zweidimensionaler und dreidimensionaler Finite-Elemente-Berechnungen der Einfluß von axialsymmetrischen und lokalen Imperfektionen, die sich auf der Bodenkalotte eines Reaktordruckbehälters befinden, erläutert. Es sollte herausgefunden werden, ob es sich bei dem nachkritischen Verformungsverhalten des Reaktordruckbehälters um ein Verzweigungsproblem handeln könnte.

Kapitel 2

Allgemeine Grundlagen der Mechanik

2.1 Kinematik des deformierbaren Körpers

Im dreidimensionalen Euklidischen Raum sei ein materieller Körper \mathcal{B} gegeben. Dieser Körper wird durch die Gesamtheit aller *materieller Punkte* \mathcal{X} gebildet und besitzt die Oberfläche \mathcal{S} . Jedem materiellen Punkt \mathcal{X} ordnet die *Referenzkonfiguration* bezüglich eines raumfesten Bezugspunktes O einen Ortsvektor zu. Eine mögliche Wahl der Referenzkonfiguration ist die zum Zeitpunkt t_0 eingenommene *Ausgangskonfiguration*, die jedem \mathcal{X} den Ortsvektor \mathbf{X} zuordnet (s. Abbildung 2.1). Der von \mathcal{B} in der Referenzkonfiguration eingenommene Raumbereich sei R_0 .

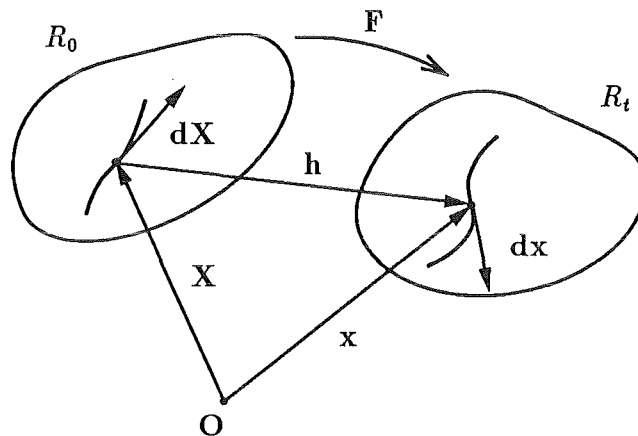


Abb. 2.1: Die von dem materiellen Körper \mathcal{B} in der Ausgangs- und Momentankonfiguration eingenommenen Raumbereiche R_0 und R_t .

Zu einem späteren Zeitpunkt $t > t_0$ wird die Lage des materiellen Punktes \mathcal{X} durch den Ortsvektor

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

beschrieben. Der dabei von \mathcal{B} eingenommene Raumbereich wird R_t bezeichnet. Die zu diesem Zeitpunkt vorliegende Konfiguration heißt *Momentankonfiguration*.

Der zugehörige *Verschiebungsvektor* \mathbf{h} wird aus der Differenz der beiden Ortsvektoren ermittelt,

d.h.

$$\mathbf{h} = \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, t) = \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad . \quad (2.2)$$

Für einen beliebigen, aber festen Zeitpunkt t wird der *Deformationsgradient* \mathbf{F} wie folgt definiert:

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \text{GRAD } \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) \quad . \quad (2.3)$$

Der Deformationsgradient ist eine Transformationsvorschrift (Zwei-Punkt- Tensorfeld), die ein materielles Linienelement $d\mathbf{X}$ der Referenzkonfiguration in ein Linienelement $d\mathbf{x}$ der Momentankonfiguration abbildet (s. Abb. 2.1), d.h.:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad . \quad (2.4)$$

Es wird vorausgesetzt, daß \mathbf{F} invertierbar ($\mathbf{F} \neq 0$) und darüber hinaus die Determinante von \mathbf{F} größer Null ist. In diesem Fall existiert für \mathbf{F} eine eindeutige polare Zerlegung (s. z.B. [18, S. 11 f]) der Form

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad . \quad (2.5)$$

Es sind \mathbf{U} und \mathbf{V} symmetrische, positiv definite Tensoren, die Rechts-Strecktensor bzw. Links-Strecktensor bezeichnet werden, \mathbf{R} ist ein eigentlich orthogonaler Tensor (d.h. $\det \mathbf{R} = +1$ und $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$), der eine Rotation beschreibt.

Mit Hilfe von \mathbf{U} und \mathbf{V} werden der rechte Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{C} := \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad , \quad (2.6)$$

und der linke Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{B} := \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{V}^2 \quad (2.7)$$

definiert.

Es kann gezeigt werden (s. z.B. [3, S. 46]), daß die beiden Strecktensoren \mathbf{U} und \mathbf{V} dieselben Eigenwerte λ besitzen. Mit Hilfe der zum Eigenwert λ_i gehörenden *normierten Eigenvektoren* \mathbf{u}_i und \mathbf{v}_i können \mathbf{U} und \mathbf{V} in die *Spektraldarstellung* (s. z.B. GURTIN [18, S. 12]):

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i \quad , \quad (2.8)$$

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (2.9)$$

überführt werden, wobei zwischen den normierten Eigenvektoren folgender Zusammenhang besteht:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{R} \mathbf{u}_i \quad . \quad (2.10)$$

Aus den Gleichungen (2.5), (2.8) und (2.10) folgt

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{u}_i \quad (2.11)$$

$$\mathbf{F}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad . \quad (2.12)$$

Der Gradient des Verschiebungsvektors nach \mathbf{X} liefert den *Verschiebungsgradient* \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{GRAD } \hat{\mathbf{h}}(\mathbf{X}, t) \quad . \quad (2.13)$$

Einsetzen von Gleichung (2.2) liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial \hat{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{1} \\ &= \mathbf{F} - \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\text{bzw.} \quad \mathbf{F} = \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{H} + \mathbf{1} \quad . \quad (2.15)$$

Als ein Maß für die Deformationsgeschwindigkeit wird der *räumliche Geschwindigkeitsgradient*

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad } \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad (2.16)$$

eingeführt, wobei

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{X}, t) = \dot{\hat{\mathbf{x}}}(\mathbf{X}, t) \quad (2.17)$$

gilt. Der Geschwindigkeitsgradient besitzt die Eigenschaft, daß er ein materielles Linienelement der Momentankonfiguration in dessen materielle Zeitableitung abbildet, d.h.

$$(\mathbf{d}\mathbf{x})' = \mathbf{L} \mathbf{d}\mathbf{x} \quad . \quad (2.18)$$

Aus Gleichung (2.4) folgt zunächst

$$\begin{aligned} (\mathbf{d}\mathbf{x})' &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{d}\mathbf{X} \\ &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{d}\mathbf{x} \quad . \end{aligned} \quad (2.19)$$

Der Koeffizientenvergleich mit (2.18) liefert

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad . \quad (2.20)$$

Unter Ausnutzung der Eigenschaft, daß jeder beliebige Tensor 2. Stufe \mathbf{A} additiv in einen symmetrischen Anteil \mathbf{A}_{sym} und einen antisymmetrischen Anteil $\mathbf{A}_{asym} = -(\mathbf{A}_{asym})^T$ zerlegt werden kann (s. [4, S. 51 f]), läßt sich der räumliche Geschwindigkeitsgradient wie folgt darstellen:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad , \quad (2.21)$$

wobei

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (2.22)$$

den symmetrischen Anteil und

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.23)$$

den antisymmetrischen Anteil des Geschwindigkeitsgradienten bilden. Die materielle Zeitableitung von (2.11) liefert

$$\dot{\mathbf{F}} = \sum_{i=1}^3 \dot{\lambda}_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{u}_i + \Omega_v \mathbf{F} + \mathbf{F} \Omega_u^T \quad . \quad (2.24)$$

Durch Einsetzen von (2.24) und (2.12) in Gleichung (2.20) ergeben sich folgende Beziehungen für den räumlichen Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} und dessen symmetrischen Anteil \mathbf{D} :

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i + \Omega_v + \mathbf{F} \Omega_u^T \mathbf{F}^{-1} \quad , \quad (2.25)$$

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i + [\mathbf{F} \Omega_u^T \mathbf{F}^{-1}]_{sym} \quad . \quad (2.26)$$

Die antisymmetrischen Tensoren Ω_v und Ω_u transformieren die normierten Eigenvektoren \mathbf{u}_i und \mathbf{v}_i in deren materielle Zeitableitungen, d.h.

$$\dot{\mathbf{v}}_i = \Omega_v \mathbf{v}_i \quad , \quad (2.27)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \Omega_u \mathbf{u}_i \quad . \quad (2.28)$$

2.2 Verzerrungstensoren

Ein mögliches Verzerrungsmaß kann wie folgt aus der Differenz der *euklidischen Normen*¹ von $d\mathbf{x}$ und $d\mathbf{X}$ definiert werden:

$$\Delta = \frac{1}{2} (\|d\mathbf{x}\|^2 - \|d\mathbf{X}\|^2) \quad . \quad (2.29)$$

¹Die euklidische Norm eines Tensors erster oder zweiter Stufe \mathbf{Y} ist die nichtnegative reelle Zahl $\|\mathbf{Y}\| = \sqrt{\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}}$.

Unter Berücksichtigung von Gleichung (2.4) läßt sich (2.29) wie folgt darstellen:

$$\Delta = d\mathbf{X} \cdot \left[\frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) \right] d\mathbf{X} := d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{X} \quad , \quad (2.30)$$

$$\Delta = d\mathbf{x} \cdot \left[\frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) \right] d\mathbf{x} := d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} d\mathbf{x} \quad . \quad (2.31)$$

Der in der Referenzkonfiguration operierende Tensor \mathbf{E} heißt *Green'scher Verzerrungstensor* und der in der Momentankonfiguration operierende Tensor \mathbf{A} wird *Almansi'scher Verzerrungstensor* bezeichnet. Diese beiden symmetrischen Tensoren können wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) \quad , \quad (2.32)$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{T-1} \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-2}) \quad . \quad (2.33)$$

Einsetzen von (2.4) in (2.31)₂ und der anschließende Koeffizientenvergleich mit (2.30)₂ liefert folgenden Zusammenhang zwischen dem Green'schen und dem Almansi'schen Verzerrungstensor:

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F} \quad . \quad (2.34)$$

Mit Hilfe von Gleichung (2.15) läßt sich (2.32)₁ in

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \mathbf{H}^T \mathbf{H} \quad (2.35)$$

$$= \tilde{\mathbf{E}} + O(\|\bar{\varepsilon}\|^2) \quad (2.36)$$

umformen, wobei $\bar{\varepsilon}$ die Norm

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(t) := \sup_{\mathbf{X} \in R_0} (\|\mathbf{H}\|) \quad (2.37)$$

bedeutet. Im Falle kleiner Deformationen gilt

$$\bar{\varepsilon} \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad \bar{\varepsilon}^2 \ll \bar{\varepsilon} \quad . \quad (2.38)$$

Unter dieser Voraussetzung kann der Restterm der Ordnung $O(\bar{\varepsilon}^2)$ gegenüber dem Anteil

$$\tilde{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T + \mathbf{H}) \quad , \quad (2.39)$$

dem *geometrisch linearisierten Green'schen Verzerrungstensor*, vernachlässigt werden.

Die materielle Zeitableitung von (2.32)₁ liefert in Verbindung mit (2.20) und (2.22) die *Verzerrungsgeschwindigkeit* des Green'schen Verzerrungstensors

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \left(\mathbf{F}^{T-1} \dot{\mathbf{F}}^T + \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right) \mathbf{F} \\
&= \mathbf{F}^T \left\{ \frac{1}{2} (\mathbf{L}^T + \mathbf{L}) \right\} \mathbf{F} \\
&= \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} \quad . \quad (2.40)
\end{aligned}$$

Umformen von (2.40)₂ liefert:

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{T-1} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \quad . \quad (2.41)$$

Die materielle Zeitableitung von Δ (Gleichung (2.30)₂) liefert unter Berücksichtigung von (2.40) und (2.4) die Beziehung

$$\dot{\Delta} = d\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{X} \quad (2.42)$$

$$= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{D} d\mathbf{x} \quad . \quad (2.43)$$

Durch Einsetzen von (2.34) in (2.41) folgt

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{T-1} \left(\mathbf{F}^T \mathbf{A} \mathbf{F} \right)' \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{A}} + \mathbf{L}^T \mathbf{A} + \mathbf{A} \mathbf{L} = \hat{\mathbf{A}} \quad , \quad (2.44)$$

wobei $\hat{\mathbf{A}}$ die sogenannte *untere Oldroyd Ableitung* von \mathbf{A} ist. Aus OGDEN [52, S. 118 f] geht hervor, daß eine Vielzahl von Verzerrungstensoren definiert werden können, die in Lagrangescher bzw. Eulerscher Schreibweise in der Form

$$\mathbf{E}_L(m) = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{U}^m - \mathbf{1}) & : m \neq 0 \\ \ln \mathbf{U} & : m = 0 \end{cases} \quad , \quad (2.45)$$

$$\mathbf{E}_E(m) = \begin{cases} \frac{1}{m} (\mathbf{V}^m - \mathbf{1}) & : m \neq 0 \\ \ln \mathbf{V} & : m = 0 \end{cases} \quad (2.46)$$

dargestellt werden können, wobei m ein Element aus der Menge der ganzen Zahlen ist. Die Tensoren \mathbf{E}_L und \mathbf{U} bzw. \mathbf{E}_E und \mathbf{V} sind *koaxial*, d.h. sie besitzen dieselben *Eigenrichtungen*.

Aus Gleichung (2.45) folgt für $m = 2$ der Green'sche Verzerrungstensor, und aus Gleichung (2.46) folgt für $m = -2$ der Almansi'sche Verzerrungstensor.

2.3 Spannungsvektoren und Spannungstensoren

In der Momentankonfiguration sei ein differentieller Kraftvektor $d\mathbf{k}$, der an einem *gerichteten Flächenelement* $d\mathbf{a}$ um \mathbf{x} angreift, gegeben. Dieser Kraftvektor wird mit Hilfe des Deformati-

onsgradienten gemäß

$$d\mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{k} \quad (2.47)$$

in die Referenzkonfiguration abgebildet (s. Abbildung 2.2), während für das gerichtete Flächenelement $d\mathbf{a}$ folgende Abbildungsvorschrift gilt:

$$d\mathbf{A} = (\det \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T d\mathbf{a} \quad (2.48)$$

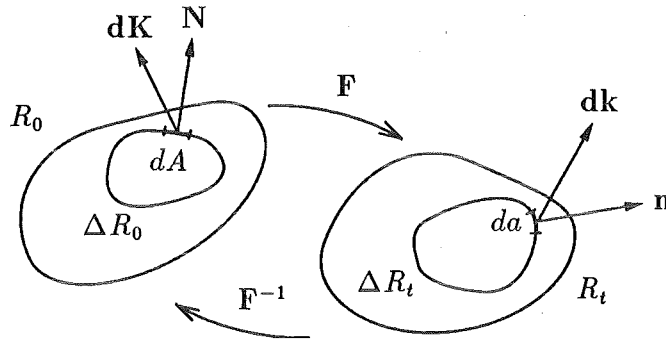


Abb. 2.2: Differentielle Flächenelemente in der Referenz- und Momentankonfiguration (ΔR_0 ist der Raumbereich eines Teilkörpers $\Delta \mathcal{B}$ in der Referenzkonfiguration und ΔR_t der Raumbereich desselben Teilkörpers in der Momentankonfiguration).

Die gerichteten Flächenelemente in R_0 und R_t sind die mit den Beträgen der Flächen multiplizierten Einheitsnormalen \mathbf{N} und \mathbf{n} , d.h. :

$$d\mathbf{A} = \mathbf{N} dA \quad (2.49)$$

$$d\mathbf{a} = \mathbf{n} da \quad (2.50)$$

Gemäß der *Hypothese von Cauchy* (s. z.B. [18, S. 97]) wird die Existenz einer stetigen Funktion $\mathbf{t} = \hat{\mathbf{t}}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ in der Belastungstrajektorie von \mathcal{X} angenommen. Diese Funktion wird *Spannungsvektor* bezeichnet und ist wie folgt definiert:

$$\mathbf{t} := \frac{d\mathbf{k}}{da} \quad (2.51)$$

Das *Theorem von Cauchy* besagt, daß ein symmetrisches Tensorfeld (*Cauchy'scher Spannungstensor*) $\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$ existiert, so daß

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \mathbf{n} \quad (2.52)$$

gültig ist. Unter Berücksichtigung von (2.51) in Verbindung mit (2.50) folgt

$$d\mathbf{k} = \mathbf{T} d\mathbf{a} \quad (2.53)$$

Neben dem Cauchy'schen Spannungstensor \mathbf{T} , der auf die Momentankonfiguration bezogen ist, existieren weitere Spannungstensoren. Auf einige davon soll im folgenden kurz eingegangen werden.

Dazu werden mit Hilfe der differentiellen Kraftvektoren folgende Spannungsvektoren und die, in Analogie zu (2.52), zugehörigen Spannungstensoren definiert:

$$\frac{d\mathbf{K}}{dA} =: \tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{N} \quad , \quad (2.54)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dA} =: \mathbf{t}_R = \mathbf{T}_R \mathbf{N} \quad . \quad (2.55)$$

Der in der Referenzkonfiguration operierende, symmetrische Tensor $\tilde{\mathbf{T}}$ wird *2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor* bezeichnet. Das nichtsymmetrische Zwei-Punkt-Tensorfeld \mathbf{T}_R , bei dem der Kraftvektor in der Momentankonfiguration auf die Fläche in der Referenzkonfiguration bezogen wird, heißt *1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor* oder *nomineller Spannungstensor*.

Unter Beachtung von (2.49) und (2.50) lassen sich (2.54) und (2.55) wie folgt umformen:

$$d\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{T}} d\mathbf{A} \quad , \quad (2.56)$$

$$d\mathbf{k} = \mathbf{T}_R d\mathbf{A} \quad . \quad (2.57)$$

Durch Einsetzen von (2.48) in (2.53) bzw. Einsetzen von (2.56) in (2.47) resultieren die Beziehungen

$$d\mathbf{k} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{T-1} d\mathbf{A} \quad (2.58)$$

$$= \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} d\mathbf{A} \quad (2.59)$$

zwischen $d\mathbf{k}$ und $d\mathbf{A}$. Der Vergleich zwischen (2.57), (2.58) und (2.59) liefert sofort folgende Zusammenhänge zwischen den drei bisher eingeführten Spannungstensoren:

$$\mathbf{T}_R = \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \quad , \quad (2.60)$$

$$\mathbf{T}_R = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \mathbf{F}^{T-1} \quad , \quad (2.61)$$

$$\tilde{\mathbf{T}} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{F}^{T-1} \quad . \quad (2.62)$$

Ein weiterer Spannungstensor ist der *gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor* \mathbf{S} , der wie folgt definiert ist:

$$\mathbf{S} = \frac{dv}{dV} \mathbf{T} \quad . \quad (2.63)$$

Hierin ist dv und dV ein differentielles Volumenelement um \mathbf{x} in der Momentankonfiguration bzw. um \mathbf{X} und in der Referenzkonfiguration. Zwischen dv und dV besteht der Zusammenhang

$$dv = (\det \mathbf{F}) dV \quad . \quad (2.64)$$

Gleichung (2.63) wird dann zu

$$\mathbf{S} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \quad (2.65)$$

und damit resultiert aus (2.61) und (2.62)

$$\mathbf{S} = \mathbf{T}_R \mathbf{F}^T \quad (2.66)$$

$$= \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T \quad . \quad (2.67)$$

2.4 Überlagerung von Starrkörperbewegungen

Eine Starrkörperbewegung ist dadurch gekennzeichnet, daß bei einer Bewegung des Körpers \mathcal{B} die Abstände zwischen den materiellen Punkten konstant bleiben. In Abbildung 2.3 sind zwei Bewegungen \mathbf{x} und \mathbf{x}^* dargestellt, die sich lediglich durch eine Starrkörperbewegung voneinander unterscheiden.

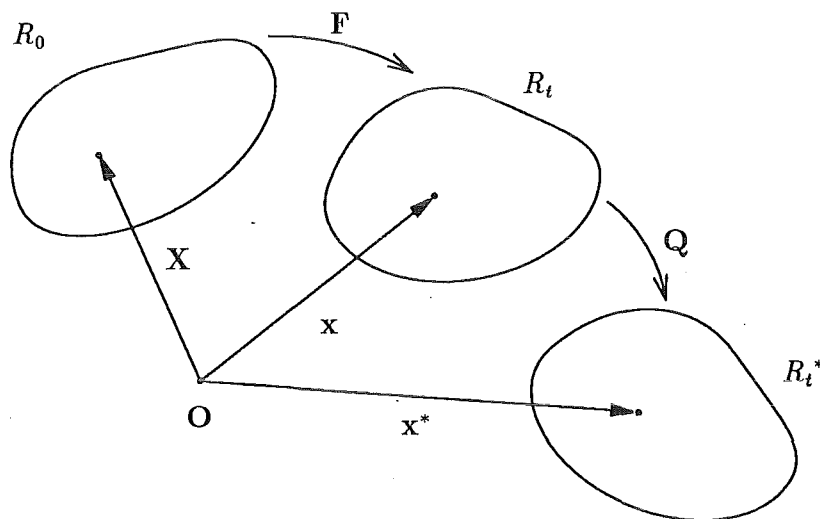


Abb. 2.3: Zwei Bewegungen des materiellen Körpers, die sich durch eine Starrkörperbewegung voneinander unterscheiden.

Zwischen den beiden Ortsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{x}^* gilt der Zusammenhang [71, S. 41]

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{c} + \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad , \quad (2.68)$$

wobei \mathbf{c} den translatorischen Anteil und \mathbf{Q} den rotatorischen Anteil der Starrkörperbewegung beschreiben.

Die partielle Ableitung nach \mathbf{X} liefert zunächst

$$\mathit{GRAD} \mathbf{x}^* = \mathbf{Q} \mathit{GRAD} \mathbf{x} \quad , \quad (2.69)$$

woraus mit (2.3)

$$\mathbf{F}^* = \mathbf{Q} \mathbf{F} \quad (2.70)$$

folgt. Somit werden auch alle anderen an den materiellen Punkt mit dem Ortsvektor \mathbf{x} gebundenen Vektoren mit Hilfe des eigentlich orthogonalen Tensors \mathbf{Q} auf denselben Punkt in R_i^* abgebildet. Unter Ausnutzung dieser Tatsache und der Annahme, daß sich der Winkel zwischen dem Kraftvektor und dem gerichteten Flächenelement in den beiden betrachteten Konfigurationen durch die Starrkörperrotation nicht ändert, folgt für $d\mathbf{k}^*$

$$\begin{aligned} d\mathbf{k}^* &= \mathbf{Q} d\mathbf{k} = \mathbf{Q} \mathbf{T} da \quad , \\ d\mathbf{k}^* &= \mathbf{T}^* da^* = \mathbf{T}^* \mathbf{Q} da \quad , \end{aligned}$$

woraus sich durch Vergleich folgende Transformationsvorschrift für den Cauchy'schen Spannungstensor ergibt

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T \quad . \quad (2.71)$$

Da die auf die Bezugskonfiguration bezogenen Größen von der Starrkörperbewegung unbeeinflusst bleiben, ergeben sich für den 1. und 2. Piola-Kirchhoff Tensor in Analogie zu (2.71) folgende Abbildungsvorschriften

$$\mathbf{T}_R^* = \mathbf{Q} \mathbf{T}_R \quad , \quad (2.72)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}^* = \tilde{\mathbf{T}} \quad . \quad (2.73)$$

2.5 Die Spannungsleistung

Die Beschreibung des mechanischen Verhaltens eines deformierbaren Körpers unter der Einwirkung von äußeren Kräften und Volumenkräften basiert auf den Axiomen der Erhaltung der Masse, des Impulses und des Drehimpulses. In diesem Zusammenhang wird auf die Literatur über die Grundlagen der Kontinuumsmechanik (z.B. [3, 18, 19, 72]) verwiesen.

Insbesondere gilt die Impulsbilanzgleichung in der lokalen Formulierung

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} - \rho \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \quad , \quad (2.74)$$

wobei ρ die Massendichte des differentiellen Volumenelements dv um \mathbf{x} und $\mathbf{b} = \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t)$ die Volumenkraftdichte sind.

Durch skalare Multiplikation der linken und rechten Seite von (2.74) mit $\dot{\mathbf{x}}$ folgt die *Bilanzgleichung der mechanischen Leistung*

$$\int_{R_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv + \int_{R_t} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv - \int_{R_t} \rho \ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv = 0 \quad . \quad (2.75)$$

Mit Hilfe der Rechenregel

$$\operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \dot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} (\mathbf{T}^T \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \quad , \quad (2.76)$$

dem *Gauß'schen Integralsatzes*

$$\int_{R_t} (\operatorname{div} \mathbf{T}) dv = \int_{\partial R_t} \mathbf{T} \mathbf{n} da \quad (2.77)$$

und unter Ausnutzung der Symmetrieeigenschaft von \mathbf{T} sowie der Identität

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \quad (2.78)$$

kann (2.75) in

$$\int_{\partial R_t} \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{x}} da + \int_{R_t} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{R_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dv + \int_{R_t} \rho (\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) dv \quad (2.79)$$

überführt werden, wobei ∂R_t den Bereich der Oberfläche von \mathcal{B} darstellt. Auf der linken Seite steht die Leistung der äußeren Kräfte; rechts vom Gleichheitszeichen steht die Leistung der inneren Kräfte sowie die zeitliche Änderung der kinetischen Energie des Körpers.

Die Leistung der inneren Kräfte wird auch *Spannungsleistung* bezeichnet. Mit Hilfe von Gleichung (2.64) folgt:

$$\int_{R_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dv = \int_{R_0} (\det \mathbf{F}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dV = \int_{R_0} \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} dV \quad . \quad (2.80)$$

Der Integrand

$$W = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D} \quad (2.81)$$

wird *spezifische Spannungsleistung* (Spannungsleistung pro Volumeneinheit der Bezugskonfiguration) genannt.

Kapitel 3

Beschreibung des Materialverhaltens

Die in Kapitel 2.1 dargestellten kinematischen Beziehungen sowie die Erhaltungssätze bzw. Bilanzgleichungen sind allgemeingültig und sind somit unabhängig von individuellen Stoffeigenschaften des Körpers. Diese Beziehungen reichen jedoch nicht aus, um die Komponenten des Spannungstensors, des Verzerrungstensors und des Verschiebungsvektors eindeutig zu bestimmen. Die fehlenden Gleichungen liefert das *Materialmodell*. Im allgemeinen wird das Materialmodell durch System von *Materialgleichungen* gebildet. Die Materialgleichungen werden auch *Materialgesetze* oder *konstitutive Gleichungen* genannt.

3.1 Darstellung des Materialgesetzes

Es wird angenommen, daß der momentane Spannungszustand ein *Funktional* der vergangenen Belastungsgeschichte ist und wie folgt dargestellt werden kann (s. z.B. HAUPT [19, S. 65]):

$$\mathbf{T}(t) = \mathcal{F}_{\tau \leq t} [\mathbf{F}(\tau)] \quad . \quad (3.1)$$

Diese Darstellung des Materialverhaltens beruht im wesentlichen auf den *Prinzipien des Determinismus* und *der lokalen Wirkung*. Sie besagen, daß der momentane Spannungszustand eines materiellen Punktes eindeutig aus der Belastungsgeschichte einer infinitesimalen Umgebung dieses Punktes ermittelt werden kann. Diese und weitere Prinzipien werden beispielsweise von TRUESDELL/NOLL [71, S. 36 - 48] und von HAUPT [20] ausführlich erläutert.

Eine funktionale Beziehung (3.1) kann explizit z.B. mit Hilfe von Integralausdrücken oder tensorwertigen Tensorfunktionen oder implizit z.B. durch ein *System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung* definiert werden¹. Bei letzterem werden dazu sogenannte *innere Variablen* q_1, \dots, q_n eingeführt, wobei deren Zeitableitungen $\dot{q}_k(t)$, $k = 1, \dots, n$ je nach Art der zugrunde gelegten Klasse von Materialmodellen, bestimmte Eigenschaften aufweisen.

¹Im allgemeinen lassen sich die implizit definierten Materialgleichungen nicht in die explizite Darstellung überführen.

Mit Hilfe der Differentialgleichungen, die auch *inkrementelle Materialgleichungen* oder *Evolutionsgleichungen* genannt werden, läßt sich die Spannungs-Dehnungs-Beziehung bei Kenntnis der Anfangsbedingungen und des Belastungsprozesses eindeutig beschreiben. Der momentane Zustand eines materiellen Punktes ist eindeutig durch die Momentanwerte der inneren Variablen und der die Belastung beschreibenden Größen gegeben. Die Gesamtheit aller Größen, die den Momentanzustand beschreiben, heißen Zustandsvariablen.

3.2 Materielle Objektivität

Ein weiterer wichtiger Aspekt bei der Formulierung der konstitutiven Gleichungen ist das Prinzip der materiellen Objektivität. Es besagt, daß das Materialverhalten unabhängig von der Wahl des Bezugssystems bzw. unabhängig von überlagerten Starrkörperbewegungen ist², d.h. für eine Bewegung $\hat{x}^*(\mathbf{X}, t^*)$, die sich nur um Starrkörperanteile von der Bewegung $\hat{x}(\mathbf{X}, t)$ unterscheidet, gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^*(t^*) &= \mathcal{F}_{\tau \leq t^*} [\mathbf{F}^*(\tau)] \quad , & (3.2) \\ t^* &= t + a \quad , \quad a = \text{konst.} \quad . \end{aligned}$$

Die Zeittransformation (3.2)₂ läßt sich so deuten, daß diese Bewegung zeitversetzt wahrgenommen wird (s. auch [79, S. 92 ff], [72, S. 44 ff] und [4, S. 180]).

Die plausible Forderung nach materieller Objektivität hat weitreichende Konsequenzen auf die Formulierung der inkrementellen Materialgleichungen, da überlagerte Starrkörperbewegungen durch die Zustandsvariablen und deren richtig geeigneten Zeitableitungen repräsentiert werden müssen.

In Anlehnung an OGDEN [52, S. 130 ff] ist eine an einen materiellen Punkt gebundene Größe (\cdot) objektiv, wenn, abhängig von der Eigenschaft von (\cdot) , eine der folgenden Abbildungsvorschriften zwischen den beiden Konfigurationen R_t und R_t^* gilt:

²Dies läßt sich zum einen so motivieren, daß zwei Beobachter, die eine Relativbewegung ausüben, dieselbe Bewegung des Körpers wahrnehmen sollen (passive Formulierung), zum anderen, daß ein und derselbe Beobachter zwei verschiedene Bewegungen des Körpers wahrnimmt, die sich lediglich durch eine Starrkörperbewegung von einander unterscheiden (aktive Formulierung).

- $(\cdot)^* = (\cdot)$: (\cdot) skalarwertig oder Lagrange'sches Vektor- oder Tensorfeld
 $(\cdot)^* = \mathbf{Q}(\cdot)$: (\cdot) Euler'sches Vektorfeld oder Zwei-Punkt-Tensorfeld
 $(\cdot)^* = \mathbf{Q}(\cdot)\mathbf{Q}^T$: (\cdot) Euler'sches Tensorfeld .

Dabei bezieht sich in diesem Zusammenhang der Begriff „Tensorfeld“ ausschließlich auf Tensoren zweiter Stufe. Aus dem Vergleich mit den Gleichungen (2.71)-(2.73) aus Kapitel 2.4 wird sofort ersichtlich, daß gemäß dieser Definitionen $\check{\mathbf{T}}$, \mathbf{T}_R und \mathbf{T} objektiv sind.

Während die materiellen Zeitableitungen von Skalaren und Lagrange'schen Feldern ebenfalls objektive Größen darstellen, sind die materiellen Zeitableitungen objektiver Euler'scher Vektor- und Tensorfelder sowie Zwei-Punkt-Tensorfelder nicht objektiv, wie am Beispiel des 1. Piola-Kirchhoff-Tensors und des Cauchy'schen Spannungstensors gezeigt werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}_R^*}{dt^*} &= \frac{d\mathbf{T}_R^*}{dt} = (\mathbf{T}_R^*)\dot{\phantom{\mathbf{T}}} = (\mathbf{Q}\mathbf{T}_R)\dot{\phantom{\mathbf{T}}} \\ &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{T}_R + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}_R \neq \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}_R ; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{d\mathbf{T}^*}{dt^*} = \frac{d\mathbf{T}^*}{dt} = (\mathbf{T}^*)\dot{\phantom{\mathbf{T}}} = (\mathbf{Q}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T)\dot{\phantom{\mathbf{T}}} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} &= \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{T}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\mathbf{T}\dot{\mathbf{Q}}^T \\ &\neq \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T \end{aligned} \quad (3.5)$$

Im Laufe der Jahre wurde eine Reihe von Zeitableitungen $\dot{\mathbf{T}}$ eingeführt, für die $\dot{\mathbf{T}}^* = \mathbf{Q}\dot{\mathbf{T}}\mathbf{Q}^T$ erfüllt ist³. Eine dieser objektiven Zeitableitungen des Cauchy'schen Spannungstensors⁴ ist die *Jaumann-Ableitung*

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W} . \quad (3.6)$$

Mit der Jaumann-Ableitung⁵ wird jenes standardmäßig in ABAQUS implementierte Materialmodell für große Deformationen formuliert, das für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen verwendet wurde (s. Kap. 4.2).

³HAUPT und TSAKMAKIS fassen in [21] die Geschichte zur Frage nach objektiven Zeitableitungen kurz zusammen.

⁴WEGENER stellt z.B. in seiner Dissertation [80, S. 29-39] 21 verschiedene Zeitableitungen vor.

⁵Zur Problematik der Jaumann-Ableitung siehe z.B. [74, S. 95-102].

3.3 Methode der konjugierten Variablen

Bei der Formulierung der inkrementellen Materialgleichungen stellt sich die Frage, welcher Spannungstensor σ welchem Verzerrungstensor ϵ sinnvollerweise zuzuordnen ist und wie deren Zeitableitungen aufgebaut sein sollten.

Ein Ansatz zur Beantwortung des ersten Teils der Frage ist die von HILL entwickelte Methode der konjugierten Variablen. Gemäß dieser Methode ist σ der zu ϵ konjugierte Spannungstensor, wenn das skalare Produkt des Spannungstensors und der materiellen Zeitableitung des Verzerrungstensors gleich der spezifischen Spannungsleistung W (s. S. 14) ist, d.h.

$$W = \sigma \cdot \dot{\epsilon} \quad (3.7)$$

Ausgehend von Gleichung (2.81) folgt durch Einsetzen von (2.67) und unter Ausnutzung von (2.40)₄

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{F} \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \\ &= \tilde{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} \\ &= \tilde{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{E}} \quad (3.8) \end{aligned}$$

Mit Hilfe von (2.78) und (2.20) wird (2.81) zu

$$\begin{aligned} W &= \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{S} \mathbf{F}^{T-1} \cdot \dot{\mathbf{F}} \\ &= \mathbf{T}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} \quad (3.9) \end{aligned}$$

Somit wird sofort ersichtlich, daß $\tilde{\mathbf{T}}$ der zu \mathbf{E} bzw. \mathbf{T}_R der zu \mathbf{F} konjugierte Spannungstensor ist.

Im Hinblick auf Kapitel 4.2 wird gezeigt, daß der gewichtete Cauchy'sche Spannungstensor \mathbf{S} die zum *logarithmischen Verzerrungstensor* $(\ln \mathbf{V})$ konjugierte Größe darstellt. Es wird hierbei Koaxialität (s. S. 9) zwischen \mathbf{S} und $(\ln \mathbf{V})$ bzw. \mathbf{S} und \mathbf{V} vorausgesetzt.

Die Spektraldarstellung des logarithmischen Verzerrungstensors $(\ln \mathbf{V})$ lautet:

$$\ln \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \ln \lambda_i \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i \quad (3.10)$$

Die materielle Zeitableitung dieser Beziehung liefert unter Berücksichtigung von Gleichung (2.27)

$$(\ln \mathbf{V})' = \sum_{i=1}^3 \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} \mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_i + \Omega_v (\ln \mathbf{V}) + (\ln \mathbf{V}) \Omega_v^T \quad (3.11)$$

Durch Auflösen von (3.11) nach dem Summenterm und Einsetzen in (2.26) ergibt sich für den symmetrischen Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten die Darstellung

$$\mathbf{D} = (\ln \mathbf{V})' - \Omega_v (\ln \mathbf{V}) - (\ln \mathbf{V}) \Omega_v^T + [\mathbf{F} \Omega_u^T \mathbf{F}^{-1}]_{sym} . \quad (3.12)$$

Diese Beziehung läßt sich mit Hilfe von (2.5) und der Antisymmetrie-Eigenschaft von Ω_u und Ω_v wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = & (\ln \mathbf{V})' - \Omega_v (\ln \mathbf{V}) + (\ln \mathbf{V}) \Omega_v \\ & - \frac{1}{2} \left(\mathbf{V} \mathbf{R} \Omega_u \mathbf{R}^T \mathbf{V}^{-1} + (\mathbf{V} \mathbf{R} \Omega_u \mathbf{R}^T \mathbf{V}^{-1})^T \right) . \end{aligned} \quad (3.13)$$

Einsetzen dieser Beziehung in Gleichung (2.81) liefert

$$\begin{aligned} W = & \mathbf{S} \cdot (\ln \mathbf{V})' - Sp((\ln \mathbf{V}) \mathbf{S} \Omega_v) + Sp(\mathbf{S} (\ln \mathbf{V}) \Omega_v) \\ & - \frac{1}{2} Sp(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V} \mathbf{R} \Omega_u \mathbf{R}^T) + \frac{1}{2} Sp(\mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R} \Omega_u \mathbf{R}^T) . \end{aligned} \quad (3.14)$$

Da Koaxialität zwischen \mathbf{S} und $(\ln \mathbf{V})$ bzw. \mathbf{S} und \mathbf{V} vorausgesetzt wurde, gilt

$$\mathbf{S} (\ln \mathbf{V}) = (\ln \mathbf{V}) \mathbf{S} , \quad (3.15)$$

$$\mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V} . \quad (3.16)$$

Infolgedessen reduziert sich Gleichung (3.14) auf

$$W = \mathbf{S} \cdot (\ln \mathbf{V})' . \quad (3.17)$$

Im Falle der Koaxialität stellt \mathbf{S} somit die zum logarithmischen Verzerrungstensor $(\ln \mathbf{V})$ konjugierte Größe dar.

Die Frage nach den zu wählenden Zeitableitungen kann mit der Methode der konjugierten Variablen nicht eindeutig beantwortet werden⁶.

⁶Eine andere Methode stellt das von TSAKMAKIS [74] entwickelte *Konzept der Dualen Variablen* dar (s. auch HAUPT/TSAKMAKIS [21]). Damit können Variablenpaare und deren *duale Zeitableitungen* bestimmt werden, die die Forderung nach Objektivität erfüllen.

Kapitel 4

Erläuterungen zur Plastizität

Zur mathematischen Beschreibung des Materialverhaltens von geschwindigkeitsunabhängigen, elastisch-plastischen Körpern wird angenommen, daß der funktionale Zusammenhang für die Spannung (3.1) implizit (in Form von Differentialgleichungen) definiert ist. Mit anderen Worten, es wird unterstellt, daß die Deformationsgeschwindigkeiten in einen elastischen und in einen plastischen Anteil additiv zerlegt werden können und daß der Spannungszustand bei Kenntnis der elastischen Anteile durch das Elastizitätsgesetz eindeutig bestimmt ist.

Die Evolutionsgleichung für die plastische Verzerrung wird so gewählt, daß die Materialantwort unabhängig von der Geschwindigkeit ist, mit der eine bestimmte Belastung aufgebracht wird, so daß die Zeit durch jeden anderen, ständig zunehmenden Parameter ersetzt werden kann. Dazu muß die Evolutionsgleichung positiv homogen von Grade 1 in der Zeit sein.

Im ersten Abschnitt wird ein Plastizitätsmodell für große Deformationen eingeführt, das zur Herleitung der im Kapitel 5 dargestellten Stabilitäts- und Bifurkationsfunktionale benötigt wird. Im zweiten Abschnitt wird jenes Materialmodell erläutert, das im FE-Code ABAQUS zur Verfügung gestellt wird und auf dem alle im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten FE-Rechnungen beruhen. Eine direkte Überführung des im ersten Abschnitt vorgestellten Materialmodells in das in ABAQUS implementierte Materialmodell ist nicht möglich. Es wird in beiden Modellen nur isotrope Verfestigung unterstellt.

4.1 Plastizitätsmodell mit isotroper Verfestigung

Es wird angenommen, daß sich der symmetrische Anteil von \mathbf{L} additiv in

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p \quad (4.1)$$

zerlegen läßt.

Die Aufgabe besteht nun darin, für dieses Plastizitätsmodell inkrementelle Materialgleichungen der Form

$$\mathbf{D}_e = \mathcal{M}_e [\dot{\mathbf{S}}] \quad , \quad (4.2)$$

$$\mathbf{D}_p = \mathcal{M}_p [\dot{\mathbf{S}}] \quad , \quad (4.3)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{D} = \mathcal{M} [\dot{\mathbf{S}}] \quad (4.4)$$

anzugeben.

Es wird angenommen, daß $\dot{\mathbf{S}}$ bei Kenntnis von \mathbf{D}_e eindeutig durch ein *Hypo-Elastizitätsgesetz*¹

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathcal{H}[\mathbf{D}_e] \quad (4.5)$$

bestimmt ist, wobei \mathcal{H} ein linearer isotroper Tensor vierter Stufe ist.

Für die folgenden Betrachtungen wird der lineare isotrope Tensor \mathcal{M}_e eingeführt, der die Inverse des Hypo-Elastizitätsgesetzes darstellt und wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{M}_e = \frac{1 + \nu}{E} \mathcal{I} - \frac{\nu}{E} (1 \otimes 1) \quad . \quad (4.6)$$

Ausgehend vom Prinzip der maximalen Dissipationsleistung (s. z.B. NAGHDI [46]) kann die *assoziierte Normalenregel*

$$\mathbf{D}_p := \begin{cases} \Lambda_S \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} & : \text{ für plastische Belastung} \\ \mathbf{0} & : \text{ sonst} \end{cases} \quad (4.7)$$

hergeleitet werden. Es sind Λ_S der sogenannte Λ -Faktor in der *Spannungsraumformulierung* (s. TSAKMAKIS [75, S. 29]) und F die *Fließfunktion*. Der skalarwertige Λ -Faktor ist eine noch zu bestimmende Größe. Im Falle einer von Mises-Fließfunktion mit rein isotroper Verfestigung $k = \hat{k}(s)$ wird

$$F = \hat{F}(\mathbf{S}, k) := \sqrt{3 J_2} - k \quad (4.8)$$

definiert. Hierin sind J_2 die zweite Invariante des Spannungsdeviators² \mathbf{S}^D

$$J_2 := \frac{1}{2} \mathbf{S}^D \cdot \mathbf{S}^D \quad , \quad (4.9)$$

$$\mathbf{S}^D = \mathbf{S} - \frac{1}{3} (Sp \mathbf{S}) \mathbf{1} \quad (4.10)$$

¹S. z.B. TRUESDELL/NOLL [71, S. 404].

²Die zweite Invariante eines symmetrischen Tensors \mathbf{A} ist durch $II(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \{ (Sp \mathbf{A})^2 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \}$ gegeben. Da die Spur des deviatorischen Anteils von \mathbf{A} verschwindet, folgt $II(\mathbf{A}^D) := J_2(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \mathbf{A}^D \cdot \mathbf{A}^D$.

und s die *plastische Bogenlänge* (plastische Vergleichsdehnung), die durch

$$\dot{s} := \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}_p \cdot \mathbf{D}_p} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \mathbf{D}_p(\tau) \cdot \mathbf{D}_p(\tau)} d\tau \quad (4.11)$$

gegeben ist. Aufgrund dieser Definition ist die plastische Bogenlänge eine monoton zunehmende Größe, d.h. $\dot{s} \geq 0$. Für festgehaltenes s beschreiben alle Spannungstensoren \mathbf{S} , die die *Fließbedingung*

$$F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{S}^D \cdot \mathbf{S}^D} \quad (4.12)$$

erfüllen, eine sogenannte Fließfläche. Der elastische Bereich ist durch Werte $F < 0$ gekennzeichnet; Werte größer Null sind per Definition nicht zulässig. Liegt der Spannungspunkt auf dem Rand der Fließfläche wird zwischen folgenden Fällen unterschieden:

$$F = 0 \quad \& \quad \dot{F} \Big|_{\dot{s}=0} \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 : \text{plastische Belastung} \\ = 0 : \text{neutrale Belastung} \\ < 0 : \text{Entlastung} \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Die objektive Zeitableitung der Fließfunktion (4.8)

$$\begin{aligned} \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} \cdot \dot{\mathbf{S}} + \frac{\partial F}{\partial k} \dot{k} \\ &= \frac{\partial \sqrt{3 J_2}}{\partial \mathbf{S}} \cdot \dot{\mathbf{S}} - k' \dot{s}, \quad \text{mit } k' = \frac{\partial k}{\partial s} \end{aligned} \quad (4.14)$$

liefert

$$\dot{F} \Big|_{\dot{s}=0} = \frac{\partial \sqrt{3 J_2}}{\partial \mathbf{S}} \cdot \dot{\mathbf{S}} \quad (4.15)$$

Der Ausdruck

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} = \frac{\partial \sqrt{3 J_2}}{\partial \mathbf{S}} \quad (4.16)$$

kann mit Hilfe von (4.8) und (4.12) zunächst in

$$\frac{\partial \sqrt{3 J_2}}{\partial \mathbf{S}} = \frac{3}{2k} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{S}} \quad (4.17)$$

überführt werden. Mit den Gleichungen (4.9) und (4.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{S}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{S}^D}{\partial \mathbf{S}} \right)^T [\mathbf{S}^D] = \left(\mathcal{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) \right)^T [\mathbf{S}^D] \\ &= \mathcal{I}[\mathbf{S}^D] - \frac{1}{3} \underbrace{(\mathbf{S}_p \mathbf{S}^D)}_{=0} \mathbf{1} = \mathbf{S}^D \end{aligned}$$

und daraus

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{S}} = \frac{3}{2k} \mathbf{S}^D \quad (4.18)$$

Es folgt schließlich

$$\mathbf{D}_p := \begin{cases} \Lambda_S \frac{3}{2k} \mathbf{S}^D & : \text{ für plastische Belastung} \\ \mathbf{0} & : \text{ sonst} \end{cases}, \quad (4.19)$$

mit dem *Belastungskriterium*

$$F = 0 \quad \& \quad \dot{F}|_{\dot{s}=0} = \frac{3}{2k} \mathbf{S}^D \cdot \dot{\mathbf{S}} \quad \begin{cases} > 0 & : \text{ plast. Belastung} \\ = 0 & : \text{ neutrale Belastung} \\ < 0 & : \text{ Entlastung} \end{cases}. \quad (4.20)$$

Einsetzen von (4.19)₁ in die Evolutionsgleichung der plastischen Bogenlänge (4.11) liefert

$$\dot{s} = \Lambda_S \sqrt{\frac{3}{2k^2} \mathbf{S}^D \cdot \mathbf{S}^D} = \Lambda_S. \quad (4.21)$$

Die noch zu bestimmende Funktion Λ_S bzw. \dot{s} resultiert aus der *Konsistenzbedingung* $\dot{F} = 0$. Sie gewährleistet, daß bei kontinuierlicher plastischer Belastung die Fließbedingung $F = 0$ erfüllt bleibt. Aus Gleichung (4.14) folgt in Verbindung mit (4.18) für $\dot{F} = 0$:

$$\dot{s} = \frac{3}{2k k'} \mathbf{S}^D \cdot \dot{\mathbf{S}}. \quad (4.22)$$

Für den Fall der plastischen Belastung folgt also als Materialgleichung für \mathbf{D}_p :

$$\mathbf{D}_p = \frac{9}{4k^2 k'} (\mathbf{S}^D \cdot \dot{\mathbf{S}}) \mathbf{S}^D \quad (4.23)$$

$$= \frac{9}{4k^2 k'} (\mathbf{S}^D \otimes \mathbf{S}^D) [\dot{\mathbf{S}}]. \quad (4.24)$$

\mathbf{D}_p hängt gemäß Gleichung (4.23) linear von der Spannungsgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{S}}$ ab. Zusammen mit der Fallunterscheidung (4.20) ergibt sich die zuvor geforderte positiv homogene Abhängigkeit von der Zeit.

Es ergibt sich somit insgesamt

$$\mathbf{D} = \mathcal{M} [\dot{\mathbf{S}}], \quad (4.25)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_e + \mathbf{D}_p \quad (4.26)$$

$$= \left\{ \frac{1+\nu}{E} \mathcal{I} - \frac{\nu}{E} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + \frac{\alpha}{g_S} (\mathbf{S}^D \otimes \mathbf{S}^D) \right\} [\dot{\mathbf{S}}], \quad (4.27)$$

$$\text{mit } g_S = \frac{4k^2 k'}{9} \quad \text{und} \quad \alpha = \begin{cases} 1 & : \text{ für plast. Belastung (4.20)}_1 \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Invertierung von (4.25) liefert die Materialgleichung in der Dehnungsraumformulierung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{S}} &= \mathbf{C} [\mathbf{D}] = \mathcal{M}^{-1} [\mathbf{D}] \\ &= \frac{E}{1+\nu} \left\{ \mathcal{I} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) - \frac{\alpha}{g_D} (\mathbf{S}^D \otimes \mathbf{S}^D) \right\} [\mathbf{D}] \quad , \quad (4.28)\end{aligned}$$

mit

$$g_D = g_s \left(\frac{1+\nu}{E} + \frac{3}{2k'} \right) \quad \text{und} \quad \alpha = \begin{cases} 1 & : \text{für plastische Belastung} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

4.2 Das Plastizitätsmodell in ABAQUS

Die Berechnungen dieser Arbeit wurden mit dem FE-Code ABAQUS durchgeführt. Das in diesem Programm standardmäßig implementierte Plastizitätsmodell weicht in einigen Punkten von dem Modell des vorherigen Abschnitts ab. Der wesentliche Unterschied besteht darin, daß die elastischen Anteile mit Hilfe eines Stoffgesetzes der Hyperelastizität auf der Basis der Theorie kleiner Deformationen ermittelt werden. Dies führt zu wesentlichen Vereinfachungen. Das im vorigen Kapitel erläuterte Materialmodell kann aufgrund der Jaumann Ableitung im Hypoelastizitätsgesetzes nicht in das hier unterstellte Hyperelastizitätsmodell überführt werden.

Im Rahmen der durchzuführenden Untersuchungen wird die Temperaturabhängigkeit der Materialparameter berücksichtigt. Zur Vereinfachung wird aber keine vollständige thermomechanische Kopplung betrachtet. Vielmehr tritt die Temperatur θ als zusätzlicher Parameter in den Gleichungen auf, die das mechanische Verhalten beschreiben, so daß die Struktur des Materialmodells einfach bleibt.

Es wird angenommen, daß der Deformationsgradient \mathbf{F} in einen elastischen und einen plastischen Anteil gemäß der Vorschrift

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p \quad (4.29)$$

multiplikativ zerlegt werden kann. Da auch \mathbf{F}_e und \mathbf{F}_p als invertierbar vorausgesetzt werden, kann durch polare Zerlegung (s. Gl. (2.5)) von \mathbf{F}_e und \mathbf{F}_p Gleichung (4.29) in

$$\mathbf{F} = (\mathbf{V}_e \mathbf{R}_e) (\mathbf{R}_p \mathbf{U}_p) \quad (4.30)$$

überführt werden. Es wird ersichtlich, daß die Zerlegung des Deformationsgradienten aufgrund der beiden Rotationen \mathbf{R}_e und \mathbf{R}_p nicht eindeutig bestimmt ist. Eine der beiden Rotationen kann beliebig gewählt werden, so daß sich bei entsprechender Wahl für die andere Rotation

dennoch die gleichen Streckanteile \mathbf{V}_e und \mathbf{U}_p ergeben. Diese Nichteindeutigkeit kann durch die Wahl $\mathbf{R}_e \equiv \mathbf{1}$ aufgehoben werden, woraus sich gemäß (2.5) unmittelbar

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{U}_e = \mathbf{V}_e \quad (4.31)$$

ergibt.

Für den räumlichen Geschwindigkeitsgradient folgt aus der multiplikativen Zerlegung:

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= (\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p)' (\mathbf{F}_e \mathbf{F}_p)^{-1} \\ &= \mathbf{L}_e + \mathbf{F}_e \mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

mit

$$\mathbf{L}_e = \dot{\mathbf{F}}_e \mathbf{F}_e^{-1} = \dot{\mathbf{V}}_e \mathbf{V}_e^{-1} \quad , \quad (4.33)$$

$$\mathbf{L}_p = \dot{\mathbf{F}}_p \mathbf{F}_p^{-1} \quad . \quad (4.34)$$

Aus der additiven Zerlegung von \mathbf{D} (4.1) folgt mit Hilfe von Gleichung (4.1):

$$\mathbf{D}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{L}_e + \mathbf{L}_e^T) \quad , \quad (4.35)$$

$$\mathbf{D}_p = \frac{1}{2} \left((\mathbf{F}_e \mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1}) + (\mathbf{F}_e \mathbf{L}_p \mathbf{F}_e^{-1})^T \right) \quad . \quad (4.36)$$

Aus den Gleichungen (4.35) und (4.34) geht hervor, daß \mathbf{D}_e eindeutig bestimmt ist, wenn \mathbf{V}_e bekannt ist. Dazu wird angenommen, daß $(\ln \mathbf{V}_e)$ mit dem konjugierten Spannungstensor \mathbf{S} durch ein Hyperelastizitätsgesetz

$$\mathbf{S} = \mathbf{f}(\ln \mathbf{V}_e) \quad (4.37)$$

verbunden ist. Hierbei beschreibt $\mathbf{f}(\)$ eine tensorwertige Materialfunktion. Da die Determinante von \mathbf{F}_e aufgrund von Beziehung (4.31) auch als Funktion von $(\ln \mathbf{V}_e)$ aufgefaßt werden kann, folgt aus Gleichungen (4.37) in Verbindung mit (2.65) für den Fall der Elastizität

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\det \mathbf{V}_e} \mathbf{f}(\ln \mathbf{V}_e) = \mathbf{g}(\ln \mathbf{V}_e) \quad , \quad (4.38)$$

wobei $\mathbf{g}(\)$ zunächst eine beliebige isotrope tensorwertige Tensorfunktion darstellt.

In ABAQUS wird eine linearisierte Version der Gleichung (4.38) verwendet:

$$\mathbf{T} = \mathbf{C}_e [\ln \mathbf{V}_e] \quad , \quad (4.39)$$

wobei \mathbf{C}_e der ebenfalls in Gleichung 4.28 enthaltene isotrope Tensor vierter Stufe

$$\mathbf{C}_e = 2\mu \mathbf{I} + \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (4.40)$$

ist. Die Größen μ und λ sind von der Temperatur abhängige Elastizitätskonstanten:

$$\mu(\theta) = \frac{E(\theta)}{2(1 + \nu(\theta))} \quad , \quad (4.41)$$

$$\lambda(\theta) = \frac{2\mu(\theta)\nu(\theta)}{1 - 2\nu(\theta)} \quad . \quad (4.42)$$

Zusätzlich wird angenommen, daß die elastischen Verzerrungen klein sind, d.h. es gilt:

$$\|\mathbf{V}_e - \mathbf{1}\| \ll 1 \quad . \quad (4.43)$$

Wegen $\mathbf{R}_e \equiv \mathbf{1}$ fällt somit $\mathbf{V}_e - \mathbf{1}$ mit dem - die elastischen Verzerrungen beschreibenden - linearisierten Green'schen Verzerrungstensor $\tilde{\mathbf{E}}_e$ zusammen (vgl. (2.39) in Verbindung mit (2.14)):

$$\tilde{\mathbf{E}}_e := \mathbf{V}_e - \mathbf{1} \quad . \quad (4.44)$$

Aus der Potenzreihenentwicklung der logarithmischen Funktion $(\ln \mathbf{V}_e) = \ln(\tilde{\mathbf{E}}_e + \mathbf{1})$ folgt zunächst

$$(\ln \mathbf{V}_e) \approx \tilde{\mathbf{E}}_e \quad . \quad (4.45)$$

Für \mathbf{D}_p ergibt sich die Näherung:

$$\mathbf{D}_p \approx \bar{\mathbf{D}}_p := \frac{1}{2} (\mathbf{L}_p + \mathbf{L}_p^T) \quad . \quad (4.46)$$

Der symmetrische, elastische Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten kann somit näherungsweise in der Form

$$\mathbf{D}_e \approx \dot{\tilde{\mathbf{E}}}_e \quad (4.47)$$

angegeben werden. In der v. Mises-Fließfunktion

$$F = \hat{F}(\mathbf{T}, k) = \hat{f}(\mathbf{T}) - \hat{k}(\bar{s}, \theta) \quad , \quad \text{mit} \quad \hat{f}(\mathbf{T}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{T}^D \cdot \mathbf{T}^D} \quad (4.48)$$

wird die temperaturabhängige isotrope Verfestigungsvariable $k = \hat{k}(\bar{s}, \theta)$ berücksichtigt, wobei \bar{s} die *arbeitsäquivalente plastische Dehnung*

$$\bar{s}(t) = \int_0^t \frac{\mathbf{T}(\tau) \cdot \bar{\mathbf{D}}_p(\tau)}{k(\tau)} d\tau \quad (4.49)$$

(s. [23, S. 5.4.1-1]) ist. Hierbei genügt \mathbf{D}_p der Fließregel

$$\bar{\mathbf{D}}_p := \begin{cases} \Lambda_S \frac{\partial F}{\partial \mathbf{T}} & : \text{für plastische Belastung} \\ \mathbf{0} & : \text{sonst} \end{cases} \quad . \quad (4.50)$$

Aus der zeitlichen Ableitung der Fließfunktion

$$\dot{F} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} - \frac{\partial \hat{k}}{\partial \bar{s}} \dot{\bar{s}} - \frac{\partial \hat{k}}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad (4.51)$$

erhält man als Belastungskriterium bei konstant gehaltenem \bar{s} :

$$F = 0 \quad \& \quad \dot{F}|_{\dot{\bar{s}}=0} = \frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} - \frac{\partial \hat{k}}{\partial \theta} \dot{\theta} \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 : \text{plastische Belastung} \\ = 0 : \text{neutrale Belastung} \\ < 0 : \text{Entlastung} \end{array} \right. \quad (4.52)$$

Aus der Konsistenzbedingung $\dot{F} = 0$ folgt schließlich, analog zu Kapitel 4.1:

$$\Lambda_S = \frac{3}{2 k k'} \mathbf{T}^D \cdot \dot{\mathbf{T}} - \frac{\partial \hat{k}}{\partial \theta} \frac{\dot{\theta}}{k'} \quad \text{mit} \quad k' = \frac{\partial \hat{k}}{\partial \bar{s}} \quad (4.53)$$

Kapitel 5

Erläuterungen zur Stabilität und zum Verlust der Eindeutigkeit

In diesem Kapitel sollen die wesentlichen Phänomene der Stabilität und Eindeutigkeit elastisch-plastischer Strukturen demonstriert werden. Obwohl im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich auf Zug beanspruchte Strukturen untersucht werden, wird im ersten Unterkapitel das prinzipielle Verhalten elastisch-plastischer Bauteile anhand des Shanley-Modells aufgezeigt, das als Abstraktion eines Druckstabes angesehen werden kann. Mit Hilfe dieses Modells gelingt es auf relativ einfache Weise wesentliche Eigenschaften elastisch-plastischer Körper zu diskutieren.

Im zweiten Unterkapitel wird kurz die allgemeine Vorgehensweise dargelegt, wie elastisch-plastische Körper auf Verzweigung und Stabilität hin untersucht werden können. Dabei werden einige Begriffe erläutert, die in den darauffolgenden Kapitel häufig verwendet werden.

5.1 Das Shanley-Modell

Das in Abb. 5.1 dargestellte Shanley-Modell¹ besteht aus zwei starren, masselosen Balken \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 der Länge $2r$ und l , die so miteinander verbunden sind, daß \mathcal{B}_2 senkrecht und mittig auf \mathcal{B}_1 steht. An den Enden von \mathcal{B}_1 befinden sich zwei elastisch-plastische Federn A und B , deren Kennlinien in Abb. 5.1 abgebildet sind. Das Modell sei weiterhin so gelagert, daß ausschließlich Bewegungen in der xy -Ebene erlaubt sind, wobei die Linie QQ' stets parallel zur y -Achse verläuft. Neben einer Verschiebung in negative y -Richtung u ist eine Drehung ϕ um Q möglich.

Das Modell werde durch eine am oberen Ende des Balkens \mathcal{B}_2 angreifende, konservative Kraft P belastet. Es wird in der in Abb. 5.1 gezeigten, aus der Lage R_0 hervorgegangenen und um den Winkel ϕ gedrehten Lage betrachtet. Diese vom Modell in der Momentankonfiguration eingenommene Lage wird mit R_t bezeichnet. Jene Lage, die das perfekte System ($\phi = 0$) zum Zeitpunkt t einnehmen würde, wird R_t^0 genannt. Sie ist aus R_0 durch reine Translation in

¹Dieses Modell geht auf Arbeiten von SHANLEY aus den Jahren 1946/47 zurück (s. z.B. SEWELL [60]).

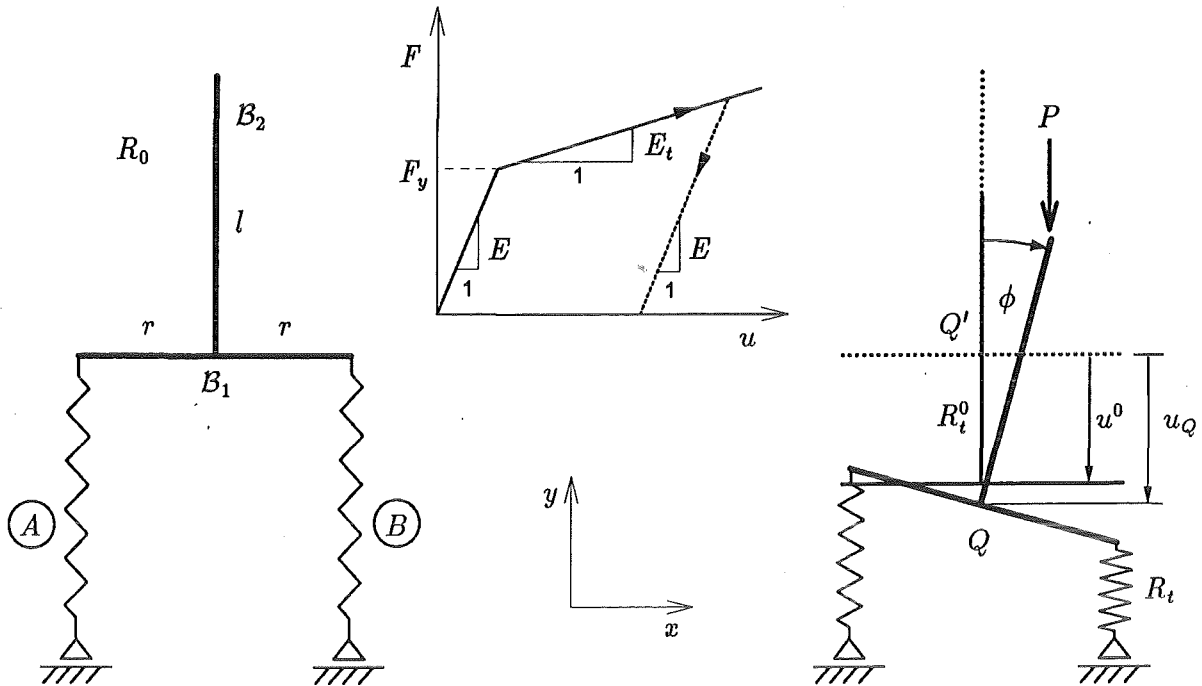


Abb. 5.1: Shanley-Modell.

negative y -Richtung um die Strecke u^0 hervorgegangen. Die Gesamtheit aller Konfigurationen $R_\tau^0, \tau = [t_0, t]$, die das perfekte System einnimmt, bildet die fundamentale Lösung des Anfangs-Randwertproblems.

Zu jedem Zeitpunkt t gibt es auf der Längsachse des Balkens B_1 im Abstand λr von Q ($\lambda \in \mathbb{R}$) einen Punkt $M(t)$ (s. Abb. 5.2), an dem die Geschwindigkeiten des ausgelenkten und des perfekten Systems gleich sind, d.h. $\dot{u}|_{\lambda r} = \dot{u}^0$.

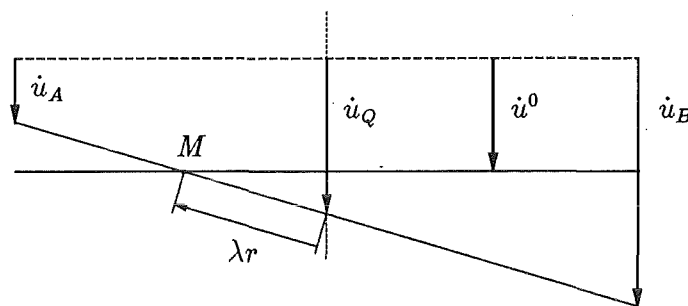


Abb. 5.2: Zur Definition der Geschwindigkeiten des Shanley-Modells.

Es werden nun kritische Zustände und somit kritische Lasten P gesucht, ab denen neben der perfekten Lage, eine gedrehte Lage eingenommen werden kann.

5.1.1 Modellgleichungen

Für die Endpunkte von B_1 gilt

$$u_A = u_Q - r \sin\phi \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_A = \dot{u}_Q - r \dot{\phi} \cos\phi \quad , \quad (5.1)$$

$$u_B = u_Q + r \sin\phi \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_B = \dot{u}_Q + r \dot{\phi} \cos\phi \quad . \quad (5.2)$$

Subtraktion von \dot{u}^0 der rechten und linken Seite von (5.2)₂ liefert zunächst

$$\dot{u}_B - \dot{u}^0 = \dot{u}_Q - \dot{u}^0 + r \dot{\phi} \cos\phi \quad , \quad (5.3)$$

woraus

$$\frac{\dot{u}_B - \dot{u}^0}{\dot{u}_Q - \dot{u}^0} = 1 + r \frac{\dot{\phi} \cos\phi}{\dot{u}_Q - \dot{u}^0} \quad (5.4)$$

folgt. Andererseits liefert der Strahlensatz

$$\frac{\dot{u}_B - \dot{u}^0}{\dot{u}_Q - \dot{u}^0} = \frac{\lambda r + r}{\lambda r} = 1 + \frac{1}{\lambda} \quad . \quad (5.5)$$

Aus dem Vergleich zwischen (5.4) und (5.5) folgt

$$r \frac{\dot{\phi} \cos\phi}{\dot{u}_Q - \dot{u}^0} = \frac{1}{\lambda}$$

bzw.

$$r \frac{\cos\phi}{u_Q' - (u^0)'} = \frac{1}{\lambda} \quad ,$$

wobei u' die Ableitung nach ϕ bedeutet. Da $u^{0'} = du^0/d\phi$ verschwindet, folgt schließlich

$$\frac{du_Q}{d\phi} = \lambda r \cos\phi \quad . \quad (5.6)$$

Das Kräftegleichgewicht in y -Richtung und das Momentengleichgewicht um Q liefern:

$$P = F_A + F_B \quad , \quad (5.7)$$

$$P \frac{l}{r} \tan\phi = F_B - F_A \quad . \quad (5.8)$$

Aufgrund des elastisch-plastischen Verhaltens der Federn sind die Federkräfte Funktionale der Verschiebungen, z.B. $F_A(t) = \int_0^t E_A(\tau) \dot{u}_A(\tau) d\tau$, wobei E_A die Werte E oder E_t annehmen kann. Zur Vermeidung der mit der Beschreibung des elastisch-plastischen Materialverhaltens verbundenen Fallunterscheidung werden zur Vereinfachung des Problems folgende Vereinbarungen getroffen [60]:

1. Es wird vorausgesetzt, daß bei der Bewegung von R_0 nach R_t^0 die Federn zu jedem Zeitpunkt $\tau = [t_0, t]$ die gleichen Federsteifigkeiten besitzen, d.h. $E_A(\tau) = E_B(\tau)$.
2. Es wird weiterhin unterstellt, daß bei der Bewegung von R_t^0 nach R_t die Federsteifigkeiten der Federn konstant bleiben, wobei jedoch ein Wechsel der Federsteifigkeit in R_t^0 stattfinden kann.

Beim perfekten System ($u = u^0$ und $\phi = 0$) wird somit jede der beiden Federn mit $P/2$ belastet. Ausgehend von der bekannten Federkraft der fundamentalen Lösung, die künftig $P^0/2$ bezeichnet wird, werden nun die Federkräfte bezüglich der gedrehten Lage formuliert. Mit Hilfe der oben getroffenen Vereinbarungen ergeben sich für die Federn A und B die Beziehungen

$$F_A = \hat{F}_A(u, \phi) = \frac{1}{2} P^0 - E_A (r \sin \phi - \Delta u) \quad , \quad (5.9)$$

$$F_B = \hat{F}_B(u, \phi) = \frac{1}{2} P^0 + E_B (r \sin \phi + \Delta u) \quad , \quad (5.10)$$

mit $\Delta u = u_Q - u^0$. Durch Einsetzen dieser beiden Beziehungen in die Kräfte- und Momentenbilanz (5.7), (5.8) folgt

$$P = P^0 - (E_A - E_B) r \sin \phi + (E_A + E_B) \Delta u \quad (5.11)$$

$$P \frac{l}{r} \tan \phi = (E_A + E_B) r \sin \phi - (E_A - E_B) \Delta u \quad . \quad (5.12)$$

5.1.2 Elastisches Knicken

Für den Fall, daß die Belastung der Federn ständig unterhalb von F_y liegt, ist $E_A = E_B = E$ und es folgt aus (5.12):

$$P \frac{l}{r} \tan \phi = 2 E (r \sin \phi) \quad (5.13)$$

bzw.

$$P = 2 E \frac{r^2}{l} \cos \phi \quad . \quad (5.14)$$

Aus dem Grenzübergang $\phi \rightarrow 0$ ergibt sich die kritische Last

$$P_c := P_E = 2 E \frac{r^2}{l} \quad . \quad (5.15)$$

Aus dem Momentengleichgewicht um die ausgelenkte Lage folgt somit für verschwindendes ϕ eine Last P_c , ab der eine von der fundamentalen Lösung verschiedene Weg-Last-Trajektorie durchlaufen werden kann. Diese Last stellt eine Euler'sche Knicklast dar und wird in Anlehnung

an die Literatur (s. z.B. SEWELL [60], [61, S. 90]) künftig "Euler Modulus"-Last genannt. Die vom Modell durchlaufende Weg-Last-Trajektorie wird Euler-Pfad [26] bezeichnet.

Da vorausgesetzt wurde, daß F_A und F_B kleiner als F_y sind, muß P_E kleiner als $2 F_y$ sein, woraus sich unmittelbar folgende Einschränkung² an das System ergibt:

$$\frac{l}{r^2} > \frac{E}{F_y} \quad (5.16)$$

Aus der ersten und zweiten Ableitung von (5.14) nach ϕ

$$\frac{dP}{d\phi} = -2 E \frac{r^2}{l} \sin \phi \quad (5.17)$$

$$\frac{d^2 P}{d\phi^2} = -2 E \frac{r^2}{l} \cos \phi \quad (5.18)$$

wird ersichtlich, daß mit dem Verlust der Eindeutigkeit gleichzeitig die *Stabilitätsgrenze* des Systems, die durch $dP/d\phi = 0$ und $d^2 P/d\phi^2 < 0$ gekennzeichnet ist, erreicht ist.

5.1.3 Plastisches Knicken

Es wird vorausgesetzt, daß F_A und F_B größer als F_y sind und daß eine elastische Entlastung ausgeschlossen wird. Dies impliziert sofort, daß $E_A = E_B = E_t$ und daß $\lambda > 1$ ist. Aufgrund der gleichen Federsteifigkeiten kann analog zum vorigen Abschnitt vorgegangen werden, d.h. in den Gleichungen (5.13) bis (5.15) ist E durch E_t zu ersetzen. Somit folgt beim plastischen Knicken die kritische Last

$$P_c := P_T = 2 E_t \frac{r^2}{l} \quad (5.19)$$

die im folgenden "Tangent Modulus"-Last bezeichnet wird. Die zugehörige Trajektorie wird "Tangent Modulus"-Pfad genannt. Auch diese Lösung ist instabil, da auch in (5.17) und (5.18) lediglich E durch E_t ersetzt werden muß.

Als Einschränkung an das System folgt in diesem Fall aus $F_A, F_B > F_y$:

$$\frac{l}{r^2} < \frac{E_t}{F_y} \quad (5.20)$$

5.1.4 Elastisch-plastisches Knicken

In dem hier untersuchten Fall wird unterstellt, daß die Feder A bei der Bewegung von R_t^0 nach R_t elastisch entlastet, d.h. $\dot{u}_A < 0$, während die Feder B weiterhin plastisch verformt wird, d.h. $\dot{u}_B > 0$. Somit folgt als einschränkende Bedingung: $-1 < \lambda < 1$.

²Diese Einschränkung entfällt bei einem Elastizitätsmodell ($F_y \rightarrow \infty$).

Aus den Federkräften

$$F_A = \frac{1}{2} P^0 - E(r \sin \phi - \Delta u) \quad ,$$

$$F_B = \frac{1}{2} P^0 + E_t(r \sin \phi + \Delta u)$$

und aus den Gleichungen (5.7) und (5.8) ergeben sich folgende Zusammenhänge zwischen der angreifenden Last P und den Verschiebungen u , ϕ :

$$P = P^0 - (E - E_t) r \sin \phi + (E + E_t) \Delta u \quad , \quad (5.21)$$

$$P \frac{l}{r} \tan \phi = (E + E_t) r \sin \phi - (E - E_t) \Delta u \quad . \quad (5.22)$$

Durch Elimination von Δu kann aus diesen beiden Gleichungen

$$P = \frac{P^0 (E - E_t) + 4 E E_t r \sin \phi}{(E - E_t) + (E + E_t) l / r \tan \phi} \quad (5.23)$$

ermittelt werden. Durch Elimination von P folgt aus (5.21) und (5.22):

$$\Delta u = \frac{\{(E + E_t) + (E - E_t) \frac{l}{r} \tan \phi\} r \sin \phi - P^0 l / r \tan \phi}{(E - E_t) + (E + E_t) l / r \tan \phi} \quad . \quad (5.24)$$

Andererseits liefert die Auflösung von (5.21) nach Δu :

$$\Delta u = \frac{P - P^0 + (E - E_t) r \sin \phi}{(E + E_t)} \quad . \quad (5.25)$$

Aus der Ableitung von (5.25) nach ϕ ergibt sich zunächst die Beziehung

$$\frac{d u_Q}{d \phi} = \frac{1}{E + E_t} \left(\frac{d P}{d \phi} + (E - E_t) r \cos \phi \right) \quad , \quad (5.26)$$

die mit Hilfe von (5.6) in

$$\frac{d P}{d \phi} = (E + E_t) r \cos \phi \left\{ \lambda - \frac{E - E_t}{E + E_t} \right\} \quad (5.27)$$

umgeformt werden kann.

Die Ableitung von (5.23) nach ϕ lautet:

$$\begin{aligned} \frac{d P}{d \phi} &= \frac{(4 E E_t r \cos \phi) \{E - E_t + (E + E_t) l / r \tan \phi\}}{\{(E - E_t) + (E + E_t) l / r \tan \phi\}^2} \\ &\quad - \frac{(P^0 (E - E_t) + 4 E E_t r \sin \phi) \{(E + E_t) l / (r \cos^2 \phi)\}}{\{(E - E_t) + (E + E_t) l / r \tan \phi\}^2} \quad . \quad (5.28) \end{aligned}$$

An der Stelle $\phi = 0$ reduzieren sich (5.27) und (5.28) auf

$$\left. \frac{dP}{d\phi} \right|_{\phi=0} = (E + E_t) r \left\{ \lambda - \frac{E - E_t}{E + E_t} \right\} \quad (5.29)$$

und

$$\left. \frac{dP}{d\phi} \right|_{\phi=0} = \frac{4 E E_t r - P^0 (E + E_t) l / r}{(E - E_t)} \quad (5.30)$$

Durch Gleichsetzen dieser beiden Beziehungen kann zwischen der Verzweigungslast $P_c = P^0$ und λ folgender Zusammenhang ermittelt werden:

$$P_c = \frac{r^2}{l} \{ (E + E_t) - \lambda (E - E_t) \} \quad (5.31)$$

Wird zusätzlich $\left. \frac{dP}{d\phi} \right|_{\phi=0} = 0$ verlangt, so ergibt sich aus (5.30) die sogenannte "Reduced Modulus"-Last

$$P_R = \frac{4 E E_t r^2}{E + E_t l} \quad (5.32)$$

Gleichung (5.29) liefert hierfür

$$\lambda_R = \frac{E - E_t}{E + E_t} \quad (5.33)$$

Für diese Last verschwindet neben der ersten auch die zweite Ableitung (siehe Anhang A).

Im folgenden werden die beiden Grenzfälle $\lambda \rightarrow (-1)$ und $\lambda \rightarrow 1$ betrachtet. Der Grenzfall $\lambda \rightarrow (-1)$ bedeutet, daß die sonst plastisch belastete Feder B gerade die neutrale Belastung ($\dot{u}_B = 0$) erfährt und die Feder A weiterhin elastisch entlastet. Die neutrale Belastung stellt die Unstetigkeitsstelle in der Federkennlinie dar (s. Abb. 5.1). Die Unstetigkeitsstelle in der Federkennlinie von Feder B wird für $\lambda \rightarrow (-1)$ von „links“ angenähert.

Aus Gleichung (5.31) folgt :

$$P_c|_{\lambda \rightarrow (-1)} = 2 E \frac{r^2}{l} \quad (5.34)$$

Diese kritische Last ist identisch mit der im Abschnitt 5.1.2 ermittelten Verzweigungslast bei rein elastischem Verhalten.

Bei dem Grenzfall $\lambda \rightarrow 1$ erfährt die voraussetzungsgemäß elastisch entlastende Feder A die neutrale Belastung ($\dot{u}_A = 0$). Die Unstetigkeitsstelle in der Federkennlinie von Feder A wird in diesem Fall von „unten“ angenähert. Aus (5.31) folgt in diesem Fall

$$P_c|_{\lambda \rightarrow 1} = 2 E_t \frac{r^2}{l} \quad (5.35)$$

die mit der "Tangent Modulus"-Last P_T (s. 5.19) identisch ist.

Während die Verzweigungslasten für $\lambda \rightarrow (-1)$ und $\lambda \rightarrow 1$ mit den in Abschnitt 5.1.2 und 5.1.3 ermittelten Lösungen zusammenfallen, ist das nachkritische Verhalten jedoch verschieden, wie Abbildung 5.3 verdeutlicht. Dazu wurde mit Hilfe der Gleichungen (5.14) und (5.23) für $E/E_t = 2$ und $l/r = 2$ die Funktion $P(\phi)$ aufgetragen.

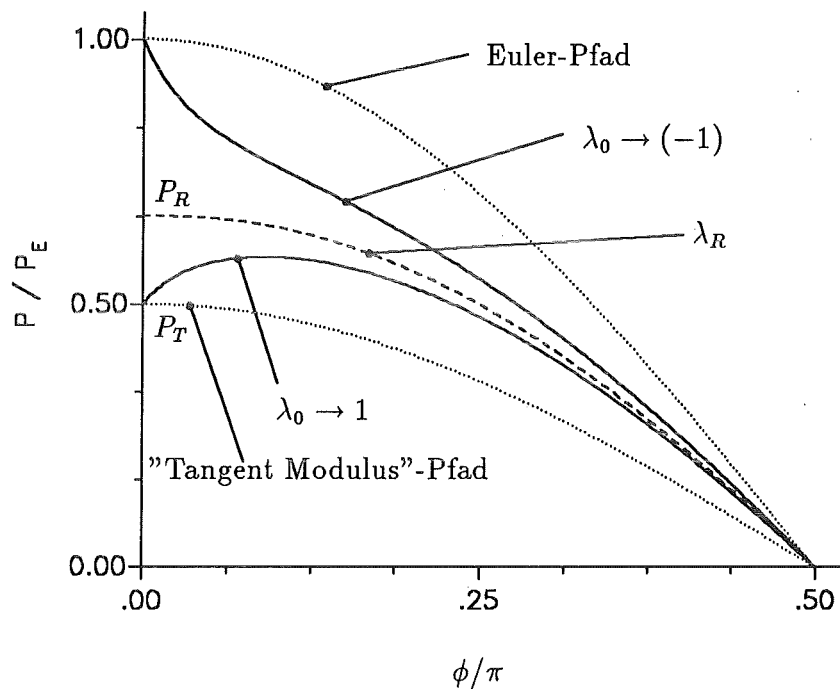


Abb. 5.3: $P - \phi$ -Kurven für rein elastisches und rein plastisches Knicken (gepunktete Linien) sowie für elastisch-plastisches Knicken für die Fälle $\lambda_0 \rightarrow (-1)$, λ_R und $\lambda_0 \rightarrow 1$, mit $E/E_t = 2$ und $l/r = 2$.

Es zeigt sich, daß der gemäß Gleichung (5.23) für $\lambda_0 \rightarrow 1$ ermittelte Pfad bis zum Erreichen eines kritischen Drehwinkels stabil ist. Der Stabilitätsverlust, der durch $dP/d\phi = 0$ und $d^2P/d\phi^2 < 0$ gekennzeichnet ist, tritt somit erst nach Erreichen der Verzweigungslast ein. Zwischen P_T und P_E existieren beliebig viele Verzweigungspunkte, wobei für Lasten $P > P_R$ die Lösung bei Erreichen der Verzweigungslast instabil ist.

Somit wird deutlich, daß die "Tangent Modulus"-Last P_T jene Belastung ist, ab der eine Verzweigung von der fundamentalen Lösung möglich ist, sie stellt somit die niedrigste Verzweigungslast P_c dar, wobei die Lösungen für Lasten $P_T \leq P_c < P_R$ zunächst stabil und für Lasten $P_R < P_c \leq P_E$ sofort instabil sind.

Die Lage des Punktes M (im Abstand λr von Q), die mit Hilfe der Gleichungen (5.27) und (5.28) berechnet wurde sowie die Gültigkeitsgrenzen der aus Gleichung (5.23) berechneten Pfade

($\lambda = \pm 1$) sind Abbildung 5.4 zu entnehmen.

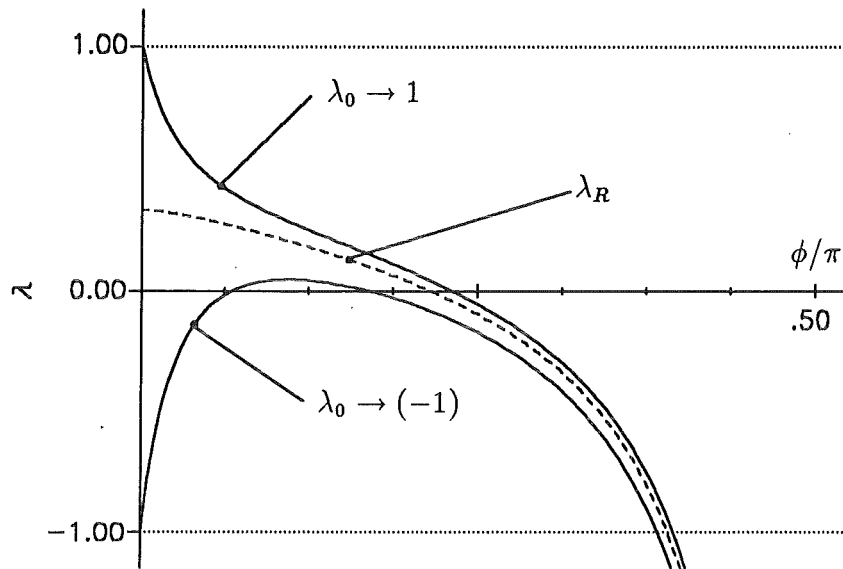


Abb. 5.4: Lage des Punktes M ($\dot{u}_M - \dot{u}^0 = 0$) in Abhängigkeit vom Drehwinkel ϕ für die drei charakteristischen Belastungspfade beim elastisch-plastischen Knicken. Die Gültigkeitsgrenzen ϕ_{max} der in Abb. 5.3 dargestellten Kurven sind durch die Schnittpunkte der $\lambda - \phi$ -Kurven mit den Linien $\lambda = \pm 1$ gekennzeichnet.

5.1.5 Einfluß von Imperfektionen

Im Falle von Anfangsimperfektionen ϕ_0 ist die oben geschilderte Vorgehensweise nicht zulässig, da die Annahme einer perfekten Konfiguration für $\phi = 0$ vorausgesetzt wird. Es wären die Funktionale der Federkräfte $F_A(t) = \int_0^t E_A(\tau) u_A(\tau) d\tau$, $F_B(t) = \int_0^t E_B(\tau) u_B(\tau) d\tau$ unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $P = 0$, $\phi = \phi_0$; der kinematischen Beziehungen (5.1) und (5.2) und der Gleichgewichtsbedingungen (5.7) und (5.8) auszuwerten.

Aus der Literatur (s. z.B. HUTCHINSON [32, S. 82], [28] bzw. [29]) ist bekannt, daß durch die imperfekte Struktur der Pfad $\lambda_0 \rightarrow 1$ approximiert wird.

5.1.6 Schlußfolgerungen

Aus der Tatsache, daß die niedrigste Last, ab der Verzweigung auftreten kann, die "Tangent-Modulus"-Last ist, können zwei wichtige Schlußfolgerungen gezogen werden.

Da die Verzweigungslasten für $\lambda \rightarrow 1$ und für die beiden sich rein plastisch verformenden Federn zusammenfallen, können die Verzweigungslasten elastisch-plastischer Körper, die kontinuierlich plastisch verformt werden, mit Hilfe des sogenannten linearen Vergleichskörpers ermittelt werden. Im Falle des Shanley-Modells bedeutet dies, daß die bilineare Federkennlinie keine elastische Entlastung enthält.

Eine weitere wichtige Erkenntnis ist, daß der Verlust der Eindeutigkeit beim Shanley-Modell dadurch gekennzeichnet ist, daß eine Feder die neutrale Belastung erfährt, während bei der fundamentalen Lösung weiterhin plastische Verformungen bestimmt werden.

HUTCHINSON zeigte in [29], daß diese Erkenntnis, die hier am Shanley Modell relativ einfach dargestellt werden konnte, auf elastisch-plastische Körper verallgemeinert werden kann. Bei elastisch-plastischen Körpern besitzt der lineare Vergleichskörper die Eigenschaft, daß in der Evolutionsgleichung von D_p die Fallunterscheidung entfällt. Eine neutrale Belastung in einer Zone, für die in der fundamentalen Lösung plastische Belastungen ermittelt werden, ist eine hinreichende (aber keine notwendige Bedingung) für den Verlust der Eindeutigkeit. Dies verdeutlicht der nun folgende Abschnitt.

5.2 Verzweigung bei elastisch-plastischen Körpern

In diesem Abschnitt wird kurz das Konzept dargestellt, auf dem die Arbeiten zur analytischen Untersuchungen von Verzweigungsproblemen elastisch-plastischer Körper basieren. Dieses Konzept beruht auf einer von HILL entwickelten Theorie³ und baut auf dem in Kapitel 4.1 erläuterten Plastizitätsmodell auf. Die hier dargestellten Gleichungen stellen im wesentlichen eine Aufarbeitung einiger Arbeiten von BRUHNS [6, 8], RANIECKI/BRUHNS [53] und SEWELL [61] dar.

Für die folgenden Betrachtungen ist es von Vorteil, zum betrachteten Zeitpunkt t die Momentankonfiguration und die Referenzkonfiguration zusammenfallen zu lassen, d.h. $F = 1$. Dies hat zur Folge, daß sämtliche Bewegungen aus der Momentankonfiguration heraus bezüglich der neuen Referenzkonfiguration (mit dem Raumbereich R_t) formuliert werden.

Bei Vernachlässigung von Trägheitskräften lautet die materielle Zeitableitung der äquivalenten

³S. z.B. HILL [24], in der er die Originalliteratur zitiert.

Darstellung der lokalen Impulsbilanz (2.74) (s. [4, S. 187])

$$DIV \dot{\mathbf{T}}_R + \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad . \quad (5.36)$$

Nach räumlicher Integration folgt

$$\int_{R_t} (DIV \dot{\mathbf{T}}_R + \dot{\mathbf{b}}) dV = \mathbf{0} \quad . \quad (5.37)$$

Mit Hilfe der Rechenregel

$$(\mathbf{F}^{T-1})' = -\mathbf{L}^T \mathbf{F}^{T-1}$$

wird die materielle Zeitableitung von \mathbf{T}_R (s. Gleichung (2.61)) zu:

$$\dot{\mathbf{T}}_R = (Sp \mathbf{D}) \mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{T} \mathbf{L}^T \quad . \quad (5.38)$$

Skalare Multiplikation von (5.37) mit $\dot{\mathbf{x}}$ liefert die *Bilanzgleichung der inkrementellen Leistung*:

$$\int_{R_t} DIV \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + \int_{R_t} \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV = 0 \quad . \quad (5.39)$$

Mit Hilfe der Produktregel

$$DIV \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \dot{\mathbf{x}} = DIV (\dot{\mathbf{T}}_R^T \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{T}}_R \cdot GRAD \dot{\mathbf{x}} = DIV (\dot{\mathbf{T}}_R^T \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \mathbf{L} \quad (5.40)$$

und dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{R_t} DIV (\dot{\mathbf{T}}_R^T \dot{\mathbf{x}}) dV = \int_{\partial R_t} \dot{\mathbf{T}}_R^T \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{N} dA = \int_{\partial R_t} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{T}}_R \mathbf{N} dA = \int_{\partial R_t} \dot{\mathbf{t}}_R \cdot \dot{\mathbf{x}} dA \quad (5.41)$$

folgt aus (5.39) mit $\mathbf{F} = \mathbf{1}$:

$$\int_{\partial R_t} \dot{\mathbf{t}}_R \cdot \dot{\mathbf{x}} dA - \int_{R_t} \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} dV + \int_{R_t} \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV = 0 \quad . \quad (5.42)$$

Die Oberfläche \mathcal{S} des materiellen Körpers \mathcal{B} wird in die beiden Teile \mathcal{S}_k bzw. \mathcal{S}_v aufgeteilt. Auf \mathcal{S}_k seien Kraftgeschwindigkeiten $\dot{\mathbf{k}}$ und auf \mathcal{S}_v die Geschwindigkeiten \mathbf{v} vorgegeben. Die zugehörigen Bereiche der Oberflächen werden $(\partial R_t)_k$ bzw. $(\partial R_t)_v$ bezeichnet. Es wird unterstellt, daß $\dot{\mathbf{k}}$ und \mathbf{v} durch einen monoton zunehmenden Skalar $\lambda \geq 0$ parametrisiert werden können, d.h. $\dot{\mathbf{k}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \lambda(t))$ und $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, \lambda(t))$.

Weiterhin wird angenommen, daß die Geschwindigkeiten der Volumenkraft $\dot{\mathbf{b}}$ und des Spannungsvektors $\dot{\mathbf{t}}_R$ lineare Funktionen der Partikelgeschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$ sind und $\dot{\mathbf{t}}_R$ zusätzlich noch eine Funktion des Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{L}^T = \dot{\mathbf{F}}^T$ ist, d.h.

$$\dot{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}}_0 + \alpha \dot{\mathbf{x}} \quad \text{in } R_t \quad , \quad (5.43)$$

$$\dot{\mathbf{t}}_R = \dot{\mathbf{t}}_{R,0} + \beta \dot{\mathbf{x}} + \kappa [\dot{\mathbf{F}}^T] \mathbf{N} \quad \text{auf } \mathcal{S}_k \quad , \quad (5.44)$$

wobei $\dot{\mathbf{t}}_{R,0}$, $\dot{\mathbf{b}}_0$, α , β und \mathcal{K} bekannte Funktionen von Ort und Zeit sind (s. hierzu RANIECKI/BRUHNS [53]).

Die folgenden Ausführungen befassen sich mit der Frage nach der Eindeutigkeit einer Bewegung des materiellen Körpers. Ausgehend von einer eindeutigen Momentankonfiguration wird unterstellt, daß für das Randwertproblem (5.36), (5.43) und (5.44) zwei verschiedene, nichttriviale Lösungen $(\cdot)^{(1)}$, $(\cdot)^{(2)}$ existieren können, d.h. beide Lösungen sind kinematisch verträglich und erfüllen die Gleichgewichts- und Randbedingungen. In jedem materiellen Punkt des Körpers wird die Differenz

$$\Delta(\cdot) := (\cdot)^{(1)} - (\cdot)^{(2)}$$

$$\text{z.B.} \quad \Delta \dot{\mathbf{x}} := \dot{\mathbf{x}}^{(1)} - \dot{\mathbf{x}}^{(2)}$$

definiert, wobei $(\cdot)^{(1)}$ bekannt sei und die fundamentale Lösung des Problems bildet.

Da beide Lösungen dieselben Randbedingungen erfüllen, gilt:

$$\Delta \dot{\mathbf{t}}_{R,0} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \mathcal{S}_k \quad , \quad (5.45)$$

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \mathcal{S}_v \quad . \quad (5.46)$$

Die Identität

$$\int_{\partial R_t} (\Delta \dot{\mathbf{t}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} - \Delta \dot{\mathbf{t}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}}) dA = 0 \quad (5.47)$$

kann mit Hilfe von (5.41)₃ in Verbindung mit (5.40)₂ und $\mathbf{F} = \mathbf{1}$ in

$$\int_{R_t} (\Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} + \text{DIV} \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}}) dV - \int_{\partial R_t} \Delta \dot{\mathbf{t}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} dA = 0 \quad (5.48)$$

überführt werden. Durch Einsetzen von (5.43) in (5.37) folgt für $\Delta(\cdot)$

$$\int_{R_t} \text{DIV} \Delta \dot{\mathbf{T}}_R dV = - \int_{R_t} \alpha \Delta \dot{\mathbf{x}} dV \quad . \quad (5.49)$$

Mit (5.49) und (5.44) sowie den Randbedingungen (5.45) und (5.46) ergibt sich aus Gleichung (5.48):

$$\int_{R_t} (\Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} - \alpha \Delta \dot{\mathbf{x}} \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}}) dV - \int_{(\partial R_t)_k} (\beta \Delta \dot{\mathbf{x}} + \mathcal{K} [\Delta \dot{\mathbf{F}}^T] \mathbf{N}) \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} dA = 0 \quad (5.50)$$

als die notwendige und hinreichende Bedingung für die Nichteindeutigkeit des Anfangs-Randwertproblems.

Folglich ist eine hinreichende Bedingung für eine eindeutige Lösung durch

$$\int_{R_t} (\Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} - \alpha \Delta \dot{\mathbf{x}} \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}}) dV - \int_{(\partial R_t)_k} (\beta \Delta \dot{\mathbf{x}} + \kappa [\Delta \dot{\mathbf{F}}^T] \mathbf{N}) \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} dA > 0 \quad (5.51)$$

gegeben. Um eine gegebene Momentankonfiguration auf eine mögliche Verzweigung hin zu untersuchen, wurde sie gleichzeitig als Referenzkonfiguration gewählt, was zur Herleitung des *Bifunktionsfunktionals* der Form

$$\bar{I}(\Delta \mathbf{T}_R, \Delta \dot{\mathbf{x}}) := \int_{R_t} (\Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} - \alpha \Delta \dot{\mathbf{x}} \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}}) dV - \int_{(\partial R_t)_k} (\beta \Delta \dot{\mathbf{x}} + \kappa [\Delta \dot{\mathbf{F}}^T] \mathbf{N}) \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} dA$$

führte. Mit diesem Werkzeug kann die fundamentale Lösung zu jedem Zeitpunkt t darauf hin überprüft werden, ob von ihr verzweigende Geschwindigkeitsfelder existieren können. Mit Hilfe der inkrementellen Materialgleichungen gelingt es (5.50) in eine Form zu überführen, so daß das Bifunktionsfunktional vollständig mit Hilfe von $\Delta \dot{\mathbf{x}}$ formuliert wird, d.h. $I = \hat{I}(\Delta \dot{\mathbf{x}})$.

Wie bereits erwähnt, wird das Materialverhalten mit Hilfe des in Kap. 4.1 erläuterten Plastizitätsmodell beschrieben. Da das Plastizitätsgesetz für die Jaumann-Ableitung des gewichteten Cauchy'schen Spannungstensor und den symmetrischen Anteil des Deformationsgradienten formuliert wurde, müssen die Tensoren transformiert werden.

Dazu werden zunächst die Potentialbeziehungen (s. z.B. SEWELL [61, S. 141 ff])

$$\hat{U}(\dot{\mathbf{F}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} \quad , \quad (5.52)$$

$$\hat{W}(\mathbf{D}) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{D} \quad (5.53)$$

eingeführt, die die Eigenschaft

$$\dot{\mathbf{T}}_R = \frac{\partial \hat{U}(\dot{\mathbf{F}})}{\partial \dot{\mathbf{F}}} \quad , \quad (5.54)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{S}} = \frac{\partial \hat{W}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \quad (5.55)$$

besitzen. Aus Gleichung (4.28) folgt für $\hat{W}(\mathbf{D})$

$$\hat{W}(\mathbf{D}) = \frac{1}{2} \mathbf{c}[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} = \frac{1}{2} \mathbf{c}_e[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{c}_p[\mathbf{D}] \cdot \mathbf{D} \quad . \quad (5.56)$$

Die beiden Potentiale $\hat{U}(\dot{\mathbf{F}})$ und $\hat{W}(\mathbf{D})$ sind gemäß

$$\hat{U}(\dot{\mathbf{F}}) = \hat{W}(\mathbf{D}) + \frac{1}{2} \hat{Z}(\dot{\mathbf{F}}) \quad (5.57)$$

ineinander überführbar, wobei $\hat{Z}(\dot{\mathbf{F}})$ die Rotationen, die aus den objektiven Ableitungen stammen, beinhaltet (s. BRUHNS [8, S. 488]).

Mit Hilfe von $\hat{U}(\dot{\mathbf{F}})$ und $\hat{W}(\mathbf{D})$ sollen nun die Materialgleichungen in das Bifurkationfunktional $I = \bar{I}(\Delta \mathbf{T}_R, \Delta \dot{\mathbf{x}})$ eingebracht werden. Dazu müssen diese Potentiale noch für die Differenzen $\Delta(\cdot)$ formuliert werden. Die Differenz

$$\hat{W}(\mathbf{D}^{(1)}) - \hat{W}(\mathbf{D}^{(2)}) = \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbf{S}}^{(1)} \cdot \mathbf{D}^{(1)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbf{S}}^{(2)} \cdot \mathbf{D}^{(2)} \quad (5.58)$$

wird recht kompliziert, da für beide Lösungen das Belastungskriterium gesondert überprüft werden muß (vgl. BRUHNS [8, S. 490]). Diese Abhängigkeit vom Belastungskriterium soll in diesem Zusammenhang symbolisch durch

$$\hat{W}(\mathbf{D}^{(1)}) - \hat{W}(\mathbf{D}^{(2)}) =: \hat{W}(\Delta \mathbf{D}, \text{Belastung?}) \quad (5.59)$$

angedeutet werden. Mit Hilfe von

$$\hat{U}(\Delta \dot{\mathbf{F}}, \text{Belastung?}) = \hat{W}(\Delta \mathbf{D}, \text{Belastung?}) + \frac{1}{2} \hat{Z}(\Delta \dot{\mathbf{F}}) \quad (5.60)$$

wird die Bedingung (5.51) zu

$$\int_{R_t} \left(2 \hat{U}(\Delta \dot{\mathbf{F}}, \text{Belastung?}) - \alpha \Delta \dot{\mathbf{x}} \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} \right) dV - \int_{(\partial R_t)_k} \left(\beta \Delta \dot{\mathbf{x}} + \kappa [\Delta \dot{\mathbf{F}}^T] \mathbf{N} \right) \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} dA > 0 \quad (5.61)$$

Motiviert durch die Erkenntnisse am Shanley-Modell, wird zur Vereinfachung der lineare Vergleichskörper eingeführt, bei dem die Fallunterscheidung entfällt, wodurch im Materialmodell (4.28) $\alpha \equiv 1$ angenommen wird. Dies setzt voraus, daß der lineare Vergleichskörper ständig plastisch belastet wird, da dann das Materialverhalten des linearen Vergleichskörpers mit dem des elastisch-plastischen Körpers zusammenfällt. Zwischen den Potentialen des linearen Vergleichskörpers und des elastisch-plastischen Körpers lassen sich die Zusammenhänge

$$\hat{W}_L(\Delta \mathbf{D}) \leq \hat{W}(\Delta \mathbf{D}, \text{Belastung?}) \quad (5.62)$$

$$\hat{U}_L(\Delta \mathbf{L}) \leq \hat{U}(\Delta \mathbf{L}, \text{Belastung?}) \quad (5.63)$$

herleiten (s. BRUHNS [8, S. 491]). Anstelle der Bedingung (5.61) wird nun

$$\hat{I}_L(\Delta \dot{\mathbf{x}}) := \int_{R_t} \left(2 \hat{U}_L(\Delta \dot{\mathbf{F}}) - \alpha \Delta \dot{\mathbf{x}} \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} \right) dV - \int_{(\partial R_t)_k} \left(\beta \Delta \dot{\mathbf{x}} + \kappa [\Delta \dot{\mathbf{F}}^T] \mathbf{N} \right) \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} dA > 0 \quad (5.64)$$

eingeführt. Dies ist eine schwächere hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung in dem Sinne, daß die Eindeutigkeit für den elastisch-plastischen Körper auf jeden Fall gewährleistet ist, wenn (5.64) gilt. Mit anderen Worten, falls (5.64) erfüllt wird, ist wegen (5.63) gleichzeitig die Bedingung (5.61) und somit auch (5.51) erfüllt.

Mit zunehmender Belastung ($\dot{\lambda} > 0$) durchläuft der Körper eine Folge von Gleichgewichtszuständen. Gesucht wird nun jenes kinematisch verträgliche und von Null verschiedene Geschwindigkeitsfeld $\Delta \dot{\mathbf{x}}_1^*$, für das die Eindeutigkeit des linearen Vergleichskörpers zum erstenmal verloren geht, d.h. es gilt

$$\hat{I}_L(\Delta \dot{\mathbf{x}}_1^*) = 0 \quad . \quad (5.65)$$

Der zugehörige Belastungsparameter wird mit $\lambda_{c,1}$ bezeichnet. Dieses ist gleichbedeutend mit dem Variationsproblem

$$[\delta \hat{I}_L(\Delta \dot{\mathbf{x}})]_{\Delta \dot{\mathbf{x}}_1^*} = 0 \quad , \quad (5.66)$$

das mit Hilfe von

$$DIV \Delta \dot{\mathbf{T}}_R + \Delta \dot{\mathbf{b}} = 0 \quad (5.67)$$

und

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{in } (\partial R_t)_v \quad (5.68)$$

und durch Umkehrung der Argumentation zur Herleitung von (5.50) in

$$\delta \hat{I}_L(\Delta \dot{\mathbf{x}}) = \int_{R_t} \delta(\Delta \dot{\mathbf{x}}) \cdot \{ \Delta \dot{\mathbf{b}} - \alpha \Delta \dot{\mathbf{x}} \} dV + \int_{(\partial R_t)_k} \delta(\Delta \dot{\mathbf{x}}) \cdot \{ \Delta \dot{\mathbf{t}}_R - \beta \Delta \dot{\mathbf{x}} - \kappa [\Delta \dot{\mathbf{F}}^T] \mathbf{N} \} dA = 0$$

überführt werden kann. Da das gesuchte Geschwindigkeitsfeld $\Delta \dot{\mathbf{x}}_1^*$ definitionsgemäß von Null verschieden ist, folgt sofort, daß die Ausdrücke in den geschweiften Klammern Null sein müssen. Somit ist $\Delta \dot{\mathbf{x}}_1^*$ auch gleichzeitig die Lösung von (5.67) des linearen Vergleichskörpers mit den Randbedingungen

$$\Delta \dot{\mathbf{b}} = \alpha \Delta \dot{\mathbf{x}} \quad \text{in } R_t \quad , \quad (5.69)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{t}}_R = \beta \Delta \dot{\mathbf{x}} + \kappa [\Delta \dot{\mathbf{F}}^T] \mathbf{N} \quad \text{in } (\partial R_t)_k \quad , \quad (5.70)$$

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{in } (\partial R_t)_v \quad . \quad (5.71)$$

Das aus (5.66) bzw. (5.67) und (5.69) bis (5.71) resultierende Geschwindigkeitsfeld $\Delta \dot{\mathbf{x}}_1^*$, das in geeigneter Art und Weise normiert ist, heißt niedrigste *Eigenform* oder niedrigster *Eigenmodus* (s. z.B. HUTCHINSON/MILES).

Ausgehend von der fundamentalen Lösung $\dot{\mathbf{x}}^{(1)}$ folgt für den niedrigsten Eigenmodus

$$\dot{\mathbf{x}}_1^{(2)} = \dot{\mathbf{x}}^{(1)} - a \Delta \dot{\mathbf{x}}_1^* \quad , \quad (5.72)$$

wobei a die Amplitude des Eigenmodus ist. Das Geschwindigkeitsfeld $\dot{\mathbf{x}}_1^{(2)}$ ist der sogenannte niedrigste *Bifurkationsmodus*. Der zum Bifurkationsmodus gehörige Lastparameter $\lambda_{c,1}$ definiert

jene kritische Last (untere Grenze), ab der bei verschwindender Amplitude a eine Verzweigung von der fundamentalen Lösung möglich ist (s. z.B. HUTCHINSON [31]).

Neben dem niedrigsten Eigenmodus $\Delta \dot{\mathbf{x}}_1^*$ existieren weitere Geschwindigkeitsfelder (Eigenformen, Eigenmoden), für die die Eindeutigkeit des Anfangs-Randwertproblems verloren gehen kann. Die zum k -ten ($k > 1$) Eigen- bzw. Bifurkationsmodus gehörende kritische Last $\lambda_{c,k}$ ist auf jeden Fall größer als $\lambda_{c,1}$.

5.3 Stabilität bei elastisch-plastischen Körpern

Der Vollständigkeit halber wird an dieser Stelle noch der Begriff Stabilität im Rahmen der bisher benutzten Grundlagen erläutert. Es wird gezeigt, daß die Frage nach dem Stabilitätsverlust und die Frage nach dem Verlust der Eindeutigkeit auf die Lösung desselben Gleichungssystems, jedoch mit verschiedenen Argumenten, führt.

Die Frage nach der Stabilität eines Systems ist nicht durch ein Naturgesetz gegeben [8, S. 497]. Ausgehend von einer gegebenen Referenzkonfiguration (Raumbereich $R_{t'}$) wird untersucht, ob eine Bewegung in die Momentankonfiguration stabil ist. Ein denkbares Stabilitätskriterium ist die Forderung, daß während der Bewegung des Körpers die Arbeit der äußeren Kräfte kleiner ist als die Änderung der inneren Energie des Körpers.

Bei Vernachlässigung von Trägheitskräften folgt, in Analogie zur Herleitung von (5.42), die zu (2.75) äquivalente Bilanzgleichung der mechanischen Leistung

$$\int_{R_{t'}} \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{L} dV - \int_{\partial R_{t'}} \mathbf{t}_R \cdot \dot{\mathbf{x}} dA - \int_{R_{t'}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV = 0 \quad . \quad (5.73)$$

Das Stabilitätskriterium bezüglich der zu untersuchenden Referenzkonfiguration mit dem Raumbereich $R_{t'}$ lautet

$$J := \int_{t'}^t \left\{ \int_{R_{t'}} \mathbf{T}_R \cdot \mathbf{L} dV - \int_{\partial R_{t'}} \mathbf{t}_R \cdot \dot{\mathbf{x}} dA - \int_{R_{t'}} \mathbf{b} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV \right\} d\tau > 0 \quad . \quad (5.74)$$

Die Taylor-Entwicklung des Integranden des Zeitintegrals um t' führt auf

$$\int_{R_{t'}} (\mathbf{T}_R + \Delta t \dot{\mathbf{T}}_R) \cdot \dot{\mathbf{F}} dV - \int_{\partial R_{t'}} (\mathbf{t}_R + \Delta t \dot{\mathbf{t}}_R) \cdot \dot{\mathbf{x}} dA - \int_{R_{t'}} (\mathbf{b} + \Delta t \dot{\mathbf{b}}) \cdot \dot{\mathbf{x}} dV + O(\Delta t^2) \quad , \quad (5.75)$$

mit $\Delta t = t - t'$.

Mit Hilfe der Bilanzgleichung (5.73) folgt für hinreichend kleine Zeitintervalle Δt

$$J \approx \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \left\{ \int_{R_t'} \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} dV - \int_{\partial R_t'} \dot{\mathbf{t}}_R \cdot \dot{\mathbf{x}} dA - \int_{R_t'} \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV \right\}, \quad (5.76)$$

woraus sich unmittelbar folgende Stabilitätsbedingung ergibt:

$$\int_{R_t'} \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \dot{\mathbf{F}} dV - \int_{\partial R_t'} \dot{\mathbf{t}}_R \cdot \dot{\mathbf{x}} dA - \int_{R_t'} \dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} dV > 0. \quad (5.77)$$

Der Vergleich mit der Bedingung für eine eindeutige Lösung (5.51), die sehr einfach in

$$\int_{R_t} \Delta \dot{\mathbf{T}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{F}} dV - \int_{\partial R_t} \Delta \dot{\mathbf{t}}_R \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} dA - \int_{R_t} \Delta \dot{\mathbf{b}} \cdot \Delta \dot{\mathbf{x}} dV > 0 \quad (5.78)$$

überführt werden kann, macht sofort deutlich, daß die Stabilitätsbedingung als Sonderfall $\dot{\mathbf{b}}^{(2)} = \dot{\mathbf{T}}_R^{(2)} = \mathbf{0} \forall \mathbf{x}$ in der Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung enthalten ist. Aufgrund der Nichtlinearität des Plastizitätsgesetzes⁴ ist bei elastisch-plastischen Körpern im Gegensatz zur linearen Elastizität der Verlust der Eindeutigkeit nicht gleichbedeutend mit dem Stabilitätsverlust, wie bereits im Abschnitt 5.1 am Beispiel des Shanley-Modells demonstriert wurde.

5.4 Abschließende Bemerkungen

Bei den im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen wurde wie folgt vorgegangen: Für jene Strukturen, für die analytische Lösungen aus der Literatur bekannt waren, wurde der perfekten Struktur an einem freien Rand Verschiebungen überlagert, die aus den aus der Literatur entnommenen Eigenformen⁵ abgeleitet wurden. Dabei war von Interesse, wie sich in den FE-Rechnungen die Amplitude und die Nummer des Eigenmodus auf das Verformungsverhalten des zu untersuchenden imperfekten Bauteils auswirkt. Besondere Aufmerksamkeit wurde zum einen thermischen Imperfektionen und zum anderen lokalen geometrischen und thermischen Imperfektionen geschenkt.

⁴Das Materialgesetz ist nichtlinear, da das Distributivgesetz nicht erfüllt ist, d.h. $\mathcal{C}[\mathbf{A} + \mathbf{B}] \neq \mathcal{C}[\mathbf{A}] + \mathcal{C}[\mathbf{B}]$.

⁵Es sei angemerkt, daß nicht bekannt ist, ob die dort angegebenen Geschwindigkeitsfelder tatsächlich die gesuchten Eigenformen sind (s. hierzu MILES [45]). Die in der Literatur angegebenen Geschwindigkeitsfelder ergaben sich aus der Annahme, daß sich die gesuchten Felder mit Hilfe von Fourierreihen (s. z.B. [69]) oder Legendre-Polynomen (s. z.B. [48]) angeben lassen.

Kapitel 6

Untersuchungen am Zugstab

6.1 Einführende Bemerkungen

Zwei Ziele werden bei den hier vorgestellten Untersuchungen verfolgt. Zum einen wird der Zusammenhang zwischen der beim Zugversuch ermittelten Kraft-Verlängerungs-Diagramm und dem für den FE-Code benötigten explizit definierten Materialgleichung $k(s)$ aufgezeigt. Dazu wird unterstellt, daß das Verformungsverhalten einer realen, rotationssymmetrischen Zugprobe durch einen perfekten Kreiszyylinder approximiert werden kann. Dadurch kann das Anfangs-Randwertproblem durch einen einzigen materiellen Punkt repräsentiert werden. Aufgrund des unterstellten homogenen Deformationszustands sind die im Abschnitt 6.2.1 hergeleiteten Beziehungen nicht universell anwendbar, da beim Zugversuch elastisch-plastische Stäbe nach Erreichen der Zugfestigkeit für gewöhnlich lokal einschnüren.

Dies führte in der Vergangenheit dazu, die Einschnürung der Probe als Verzweigungsproblem zu behandeln, wobei die fundamentale Lösung durch das Verhalten der perfekten Kreiszyylinder gegeben ist. In den letzten Jahrzehnten erschienen hierzu zahlreiche Veröffentlichungen, in denen unterschiedliche Aspekte im Vordergrund standen.

Als einfacher Ansatz zur Beschreibung der Radial- und Axialkomponenten u, w der k Eigenformen (s. Gleichung 5.72) bieten sich die Funktionen

$$u = \hat{u}(k, r, z) = f(r)\cos(k\pi z/l_0) \quad (6.1)$$

$$w = \hat{w}(k, r, z) = g(r)\sin(k\pi z/l_0) \quad , \quad (6.2)$$

bzw.

$$u = \hat{u}(k, r_0, z) = \cos(k\pi z/l_0) \quad (6.3)$$

$$w = \hat{w}(k, r_0, z) = \sin(k\pi z/l_0) \quad (6.4)$$

an [47] (s. auch [7, 11, 31, 45]), wobei r_0 der normierte Radius und l_0 die Länge der axialsymmetrischen Probe sind.

Das aus dem Bifurkationsfunktional (5.65) ableitbare System gewöhnlicher homogener Differentialgleichungen kann numerisch integriert¹ werden. HUTCHINSON/MILES [31] reduzierten dieses Differentialgleichungssystem auf eine einzige Gleichung, die auf die Lösung von Besselfunktionen erster Gattung mit komplexen Argumenten führt. NEEDLEMAN [47] führte die Variation des Bifurkationsfunktionals (5.66) auf ein Eigenwertproblem zurück, das mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente ausgewertet wurde².

Andererseits kann an dieser relativ einfachen Bauteilgeometrie demonstriert werden, wie sich axialsymmetrische Imperfektionen auf das Verformungsverhalten von zylindrischen Zugstäben auswirken und wie sie mit den bekannten Untersuchungsergebnissen zur Verzweigung in Einklang zu bringen sind. Die Untersuchungen dienen ausschließlich dazu, die Ergebnisse der FE-Rechnungen zur Kugel und zum Reaktordruckbehälter besser interpretieren zu können.

6.2 Der Zugversuch

Beim Zugversuch werden die Zugproben weggesteuert bis zum Bruch verlängert. Dabei wird die dazu benötigte Zugkraft F und die Längenänderung der Probe Δl gemessen. Zur Bestimmung von Werkstoffkenngrößen wird zunächst die Zugkraft auf die Ausgangsquerschnittsfläche $A_0 = \pi r_0^2$ und die Längenänderung auf die Ausgangslänge l_0 bezogen und im *Nennspannungs - Totaldehnungs - Diagramm* übereinander aufgetragen. Wird die gemessene Zugkraft auf den momentanen Querschnitt $A = \pi r^2$ bezogen, folgt in Verbindung mit der *logarithmischen Dehnung* $\epsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l}$ das *wahre Spannungs-Dehnungs-Diagramm*.

Einen typischen Verlauf einer Zugkurve eines duktilen Materials zeigt Abbildung 6.1. Der Einfachheit halber wird unterstellt, daß sich die Probe zu Beginn rein elastisch und nach Erreichen der Streckgrenze R_e , elastisch-plastischen verformt. Nach Erreichen der Zugfestigkeit R_m nimmt die Nennspannung wieder ab und die Probe beginnt sich lokal einzuschnüren, wobei das Material im Bereich der Einschnürstelle weiterhin plastische Deformationen erfährt.

¹Siehe z.B. die Arbeiten von BRUHNS [7], CHENG ET AL. [11], MILES [45], THOMASON [67]

²NEEDLEMAN erwähnt, daß die für verschiedene Schlankheitsgrade berechnete Radialkomponente des niedrigsten (normierten) Eigenmodus auf mindestens drei Stellen genau durch eine Kosinusfunktion beschrieben werden kann.

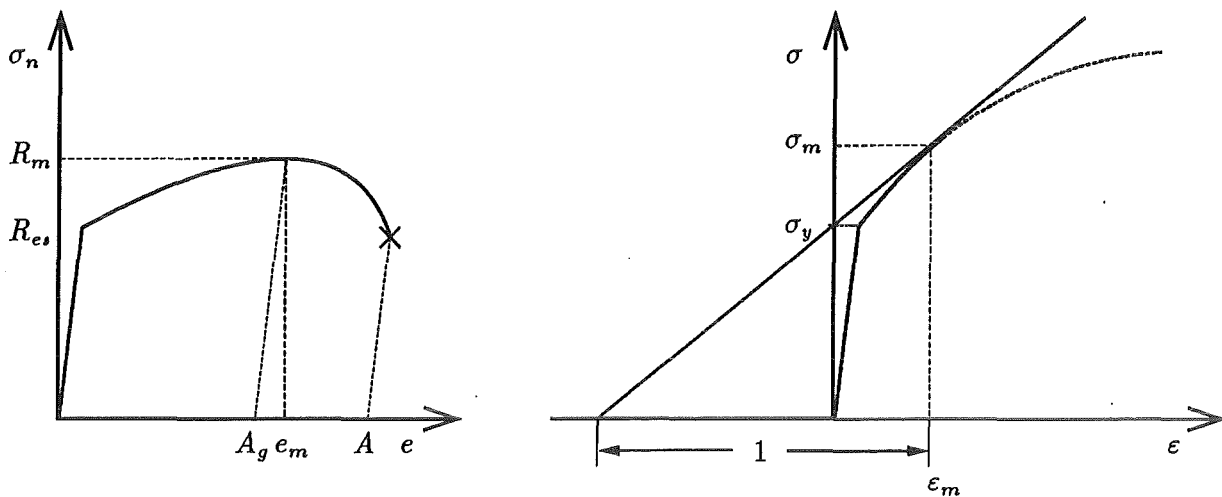


Abb. 6.1: Nennspannungs-Totaldehnungsdiagramm (links) und das wahre Spannungs-Dehnungs-Diagramm (rechts).

6.2.1 Kinematische Beziehungen

Gegeben sei eine zylindrische Probe der Länge l_0 mit dem Radius r_0 sowie ein Zylinderkoordinatensystem (r, φ, z) , dessen Ursprung sich im Zentrum der Zugprobe befindet und dessen z -Achse coaxial zur Längsachse der zylindrischen Zugprobe verläuft. Die Probe sei so gelagert, daß die $(r, \varphi, 0)$ -Ebene axial nicht verschieblich ist.

Bei einachsigen Zug reduziert sich der Cauchy'sche Spannungstensor \mathbf{T} auf

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Unter der Voraussetzung eines homogenen Deformationszustands kann der Deformationsgradient \mathbf{F} , der Verschiebungsgradient \mathbf{H} sowie der daraus gemäß Gleichung (2.39) abgeleitete linearisierte Green'sche Verzerrungstensor $\tilde{\mathbf{E}}$ wie folgt dargestellt werden:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} r/r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l/l_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} (r - r_0)/r_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (l - l_0)/l_0 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Hierin sind l und r die Abmessungen der Zugprobe in der Momentankonfiguration. Es wird ersichtlich, daß die z,z -Komponente des linearisierten Green'schen Verzerrungstensors die aus dem Zugversuch ermittelte *Totaldehnung*

$$e := \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (6.7)$$

ist. Aus der polaren Zerlegung von \mathbf{F} (2.5) und der Tatsache, daß die materiellen Punkte keine Rotation erfahren, d.h. $\mathbf{R} = \mathbf{1}$, folgt $\mathbf{F} = \mathbf{V}$ und somit

$$(\ln \mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \ln(r/r_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ln(l/l_0) \end{pmatrix} . \quad (6.8)$$

Zwischen der Totaldehnung und der *logarithmischen Dehnung* (wahren Dehnung)

$$\varepsilon = \ln(l/l_0) \quad (6.9)$$

ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\varepsilon = \ln(1 + e) \quad \Leftrightarrow \quad e = e^\varepsilon - 1 . \quad (6.10)$$

Da die aus dem Zugversuch abgeleitete Nennspannung σ_n identisch mit der z,z -Komponente des 1. Piola-Kirchhoff Tensors ist (s. S. 11), besteht gemäß Gleichung (2.61) zwischen σ_n und der wahren (Cauchy'schen) Spannung σ folgender Zusammenhang:

$$\sigma_n = (\det \mathbf{F}) \sigma \left(\frac{1}{1 + e} \right) . \quad (6.11)$$

Mit Hilfe der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_p$ (s. S. 24) und der Rechenregel

$$\det(\mathbf{A} \mathbf{B}) = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$$

(s. z.B. [4, S. 82]) kann Gleichung (6.11) unter der Annahme plastischer Inkompressibilität, d.h.

$$\det \mathbf{F}_p = 1 ,$$

und kleiner elastischer Verzerrungen (s. S. 8 f), woraus mit $\mathbf{R}_e \equiv \mathbf{1}$

$$\det \mathbf{F}_e \approx 1$$

folgt, in

$$\sigma_n = \sigma \left(\frac{1}{1 + e} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma = \sigma_n (1 + e) \quad (6.12)$$

überführt werden.

Durch Differentiation von Gleichung (6.12)₁ nach der Totaldehnung können folgende Beziehungen zwischen den Steigungen im Nennspannungs-Totaldehnungs-Diagramm und den Steigungen im wahren Spannungs-Dehnungs-Diagramm hergeleitet werden:

$$\frac{d\sigma_n}{de} = \frac{d}{de} \left(\frac{\sigma}{1 + e} \right) = \frac{d\sigma}{de} \left(\frac{1}{1 + e} \right) - \frac{\sigma}{(1 + e)^2} \quad (6.13)$$

bzw.

$$\frac{d\sigma}{de} = \frac{d\sigma_n}{de} (1+e) + \left(\frac{\sigma}{1+e} \right) . \quad (6.14)$$

Für die Steigung im (σ, ε) -Diagramm, den sog. *Tangentenmodul* E_t ,

$$E_t := \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma}{de} \frac{de}{d\varepsilon} \quad (6.15)$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der Gleichungen (6.15) und (6.14) der Zusammenhang

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{d\sigma_n}{de} (1+e)^2 + \sigma . \quad (6.16)$$

6.2.2 Die Instabilitätsbedingung

Da bei Erreichen der Zugfestigkeit die Nennspannung maximal ist, folgt:

$$\left. \frac{d\sigma_n}{de} \right|_{\sigma_n=R_m} = 0 . \quad (6.17)$$

Damit vereinfacht sich Gleichung (6.16) am Punkt der Maximallast auf

$$E_t \Big|_{\sigma_n=R_m} = \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\sigma_n=R_m} = \sigma_m . \quad (6.18)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (6.10) und (6.12) ergeben sich beim Kraftmaximum folgende wichtige Zusammenhänge:

$$\varepsilon_m = \ln(1+e_m) , \quad (6.19)$$

$$\sigma_m = R_m(1+e_m) . \quad (6.20)$$

6.2.3 Der Verlust der Eindeutigkeit

Eine Kernaussage aller Arbeiten, die sich mit starrplastischen oder elastisch-plastischen Zugstäben befaßten, ist, daß der Verlust der Eindeutigkeit erst nach Erreichen der maximalen Last eintreten kann.

Für den linearen Vergleichskörper bestimmten HUTCHINSON/MILES [31] für inkompressible, elastisch-plastische Materialien mit isotroper Verfestigung und der v. Mises Fließfunktion neben einer nur numerisch lösbaren exakten Lösung eine Näherungslösung für die Spannung σ_c , ab der für die k -ten Eigenformen (6.1), (6.2) eine Verzweigung möglich ist; sie lautet:

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_m} = 1 + \frac{\gamma^2}{8} + \frac{E}{3 E_t^c} \frac{\gamma^4}{192} , \quad \text{mit} \quad \gamma = k \pi \frac{r_c}{l_c} . \quad (6.21)$$

Hierin sind σ_m die wahre Spannung beim Kraftmaximum, E_t^c der Tangentenmodul und r_c und l_c die Abmessungen der Zugprobe beim Verzweigungspunkt. Die mittels der Näherungslösung berechneten Spannungen σ_c liegen unterhalb derer, die aus der exakten Lösung resultieren, wobei die Differenz für steigende γ - und E/E_t -Werte zunimmt. HUTCHINSON/MILES geben in [31] beispielsweise für ein bilinear verfestigendes Material mit $\gamma=0.4$ und $E/E_t=100$ für die Näherungslösung $\sigma_c/\sigma_m=1.0244$ und für die exakte Lösung $\sigma_c/\sigma_m=1.0253$ an.

Im Nennspannungs-Totaldehnungs-Diagramm hängt somit der Abstand der Punkte (R_m, e_m) und (R_c, e_c) neben dem Schlankheitsgrad der Probe $2r_0/l_0$ vom zugrunde gelegten Materialgesetz ab (s. auch [7]). NEEDLEMAN zeigte in [47], daß bei Verwendung des Materialgesetzes

$$\varepsilon = \begin{cases} \sigma/E & : \sigma \leq \sigma_y \\ \sigma^n/E\sigma_y^{n-1} & : \sigma \geq \sigma_y, n \geq 2 \end{cases}, \quad (6.22)$$

für größere Verfestigungsexponenten n die Totaldehnungen e_m und e_c zunehmen, die Differenz $e_c - e_m$ jedoch abnimmt. Eine Erniedrigung der Fließspannung σ_y führt dazu, daß sowohl e_m und e_c als auch $e_c - e_m$ zunehmen.

6.3 FE-Rechnungen

6.3.1 Allgemeines

Den mit ABAQUS, Version 4.9, durchgeführten FE-Rechnungen wurde das in Kapitel 4.2 erläuterte Thermoplastizitätsmodell für kleine elastische und große plastische Deformationen ohne thermomechanische Kopplung zugrunde gelegt. Die thermoelastischen Effekte blieben ebenfalls unberücksichtigt. Eingabegrößen in den FE-Code sind der von der Temperatur θ abhängige Elastizitätsmodul $E = \hat{E}(\theta)$, die Querkontraktionszahl $\nu = \hat{\nu}(\theta)$ sowie das Materialgesetz $\hat{k}(s; \theta)$, wobei k im Falle rein isotroper Verfestigung und einer v. Mises Fließfunktion gleich der v. Mises Vergleichspannung $\sigma_v = \sqrt{3J_2}$ und s die plastische Bogenlänge (plastische Vergleichsdehnung) ist. Das Materialgesetz $\hat{k}(s; \theta)$ wird durch Eingabe diskreter Punkte $(k, s)|_{\theta_j = konst}; j = 1, 2, \dots, n$ für die Temperaturen $\theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n$ definiert, wodurch ein Materialmodell mit *multilinearer isotroper Verfestigung* entsteht. Die Punkte $(k, 0) \forall \theta_j$ definieren die Fließgrenzen $\sigma_y(\theta_j)$. Für Temperaturen $\theta_k < \theta < \theta_{k+1}; k = [1, n-1]$ werden die Materialeigenschaften durch lineare Interpolation aus den Werten für die Temperaturen θ_k und θ_{k+1} ermittelt.

Der Einfachheit halber wurden für die grundlegenden Untersuchungen der Kapitel 6-8 unterstellt, daß das Material eine lineare isotrope Verfestigungen aufweist (bilineares Materialverhalten).

Es kann gezeigt werden, daß zwischen dem Tangentenmodul E_t (s. Gl. (6.15)) und der zur Eingabe in den FE-Code benötigten Steigung

$$E'_t := \frac{d k}{d s}$$

folgender Zusammenhang

$$E'_t = \frac{E E_t}{E - E_t} \quad (6.23)$$

besteht.

Für die FE-Rechnungen wurden Netze generiert, deren Knotenkoordinaten aus den aus der Literatur bekannten Ansätzen zur Beschreibung der Eigenformen (6.3), (6.4) abgeleitet wurden, wobei jedoch lediglich die Radialkomponente berücksichtigt wurde. Diese Vorgehensweise ist allgemein üblich (s. [10, 73, 77, 78]) und, wie Testrechnungen (s. Kapitel 6.3.3) ergaben, auch ausreichend.

Sämtliche FE-Rechnungen wurden unter Zuhilfenahme eines standardmäßig in ABAQUS implementierten Pfadverfolgungsalgorithmus durchgeführt. Mit Hilfe dieses sog. modifizierten Riks-Algorithmus³ (s. HIBBITT ET AL. [23, S. 3.10.1-1 ff], CRISFIELD [13, S. 274 f]) wird bei einer Kraftsteuerung, parametrisiert durch den Skalar λ , nach Erreichen der Stabilitätsgrenze der Belastungsparameter λ solange um $\Delta\lambda$ verkleinert bzw. vergrößert, bis ein Gleichgewichtszustand gefunden ist. Falls $|\Delta\lambda|$ die zuvor definierte minimale Inkrementgröße unterschreitet, wird die Rechnung abgebrochen.

Obwohl die Berechnungen zum Zugstab weggesteuert durchgeführt wurden, ergab sich ein deutlich besseres Konvergenzverhalten und eine höhere Imperfektionssensitivität bei Verwendung des Pfadverfolgungsalgorithmus⁴. Die Berechnungen zur Kugel (Kap. 7) und zum Reaktor-druckbehälter (Kap. 8 und 9) wurden innendruckgesteuert durchgeführt und machten somit die Verwendung des modifizierten Riks-Algorithmus notwendig.

³Dieser Algorithmus wurde aus Arbeiten von RIKS (s. z.B. [55]) abgeleitet.

⁴Dies war dadurch begründet, daß lediglich die Koordinaten der die Mantelfläche bildenden Knoten neu berechnet wurden; die Koordinaten der restlichen Knoten stimmten mit den Koordinaten des perfekten Zugstabs überein (s. Kap. 6.3.2). Testrechnungen zeigten, daß bei Verwendung eines Netzes, bei dem alle Knotenkoordinaten des imperfekten Zugstabs neu berechnet wurden, dieses Phänomen nicht auftrat.

6.3.2 Diskretisierung

Die FE-Rechnungen wurden für kreiszylindrische Stäbe mit einem Schlankheitsgrad $l_0/2r_0 = 10$ (lange Proportionalstäbe) durchgeführt. Zur Bestimmung des Verformungsverhaltens des Zugstabs bei Vorgabe lokaler Imperfektionen oder Imperfektionen im Sinne des Bifurkationsmodus 1 mußte die gesamte Zugprobe generiert werden (im folgenden als Stab 1 bezeichnet), während bei Vorgabe von Imperfektionen im Sinne des Bifurkationsmodus 2 die Symmetrie bezüglich der $(r, \varphi, 0)$ -Ebene ausgenutzt wurde (Stab 2).

Die zur Berechnung der fundamentalen Lösungen zugrunde gelegten FE-Netze und Randbedingungen zeigt Abbildung 6.2. Die Netze bestehen aus 320 (Stab 1) bzw. 160 8-knotigen, axialsymmetrischen Elementen mit reduzierter Integrationsordnung (2x2-Integration). Die reduzierte Integrationsordnung wurde gewählt, da bei voller Integrationsordnung (3x3-Integration) bei der Simulation von mit Innendruck beaufschlagten Kugelschalen für inhomogene Temperaturfelder und von der Temperatur abhängigen Elastizitätsmoduln und Wärmeausdehnungskoeffizienten Zick-Zack-Verläufe bei den Radialspannungen resultierten (s. [39, S. 21]).

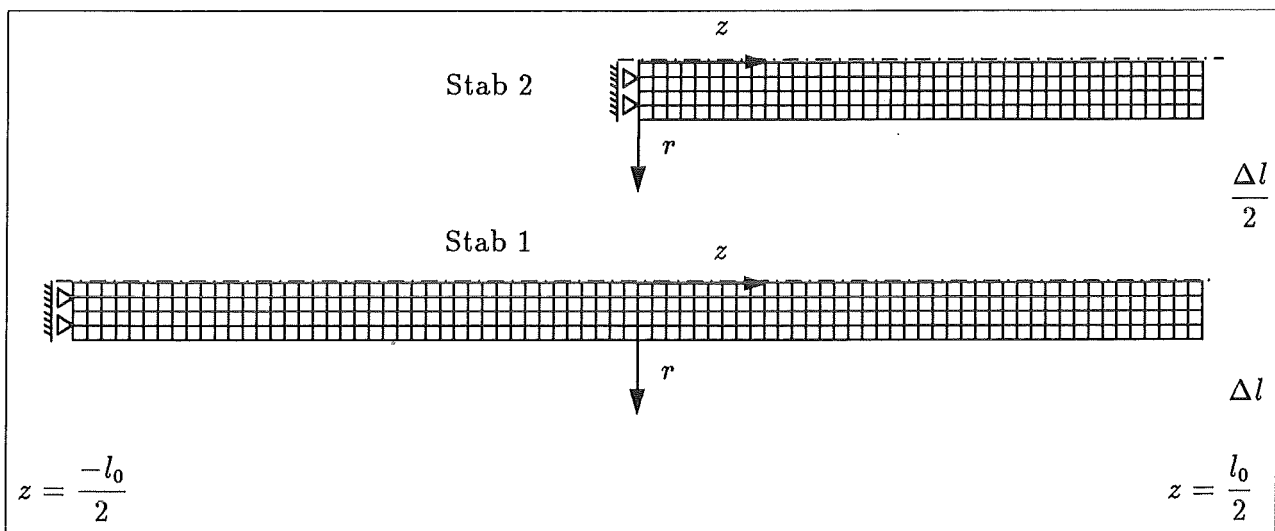


Abb. 6.2: Die den FE-Rechnungen zur Ermittlung der fundamentalen Lösungen zugrunde gelegten Finite-Elemente Netze und Randbedingungen.

6.3.3 Globale Imperfektionen

Als globale Imperfektionen werden im folgenden jene geometrischen Imperfektionen bezeichnet, die aus dem Ansatz zur Beschreibung des k -ten Eigenmodus (6.3) resultieren.

Ausgehend von den in Abb. 1 gezeigten Netzen, wurden die Koordinaten der die Mantelfläche

des Zugstabs bildenden Knoten gemäß

$$\hat{r}(\xi_g, k, z) = r_0 - \xi_g r_0 \cos \left(k\pi \left(\frac{z}{l_0} + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (6.24)$$

mit

$$\begin{aligned} k = 1, 3, \dots \quad \text{und } z &= [-l_0/2, l_0/2] \quad \text{für Stab 1} \quad , \\ k = 2, 4, \dots \quad \text{und } z &= [0, l_0/2] \quad \text{für Stab 2} \end{aligned}$$

neu berechnet, wobei k die Nummer des Bifurkationsmodus bzw. die Anzahl der Halbwellen über die Gesamtlänge l_0 ist (s. auch Abb. 6.5). Der Parameter ξ_g ist die auf den Nennradius bezogene Amplitude der Welle $|\Delta r_{max}|$, d.h.

$$\xi_g = \frac{|\Delta r_{max}|}{r_0} \quad (6.25)$$

Eine zusätzliche Streckung und Stauchung der Welle in axialer Richtung gemäß einer aus (6.4) abgeleiteten Imperfektion der Form

$$\hat{z}(\xi_g, k, z_0) = z_0 + \xi_g l_0 \sin \left(k\pi \left(\frac{z}{l_0} + \frac{1}{2} \right) \right) \quad (6.26)$$

ergab keine erkennbare Abweichung, wie Testrechnungen für $k = 2$ (in diesem Fall mit Stab 1) ergaben.

Für die Materialparameter $E_t/E = 0.005$, $E_t/\sigma_y = 2$ und $\nu = 0.3$ wurden Zugversuche für verschiedene Amplituden $\xi_g r_0$ durch Vorgabe der Knotenverschiebungen an der Stelle $z = l/2$ simuliert. In Abbildung 6.3 sind die Ergebnisse der für $k = 2$ durchgeführten FE-Rechnungen dargestellt. Hierin sind F die Reaktionskraft in axialer Richtung und F_{max}^f die Maximalkraft des perfekten Zugstabs (fundamentale Lösung des Anfangs-Randwertproblems).

Es wird ersichtlich, daß sich mit abnehmender Imperfektionsgröße die Kurven einer Grenzkurve annähern, die in etwa durch den Kurvenverlauf für $\xi_g = 10^{-6}$ gegeben ist. Für $\xi_g = 10^{-8}$ ergibt sich ein deckungsgleicher Verlauf mit der fundamentalen Lösung und sich dadurch auszeichnet, daß an allen Integrationspunkten ständig plastische Belastungen ermittelt werden. Mit anderen Worten, die Lösungen springen numerisch bedingt, ab einer hinreichend kleinen Amplitude zu der Lösung der fundamentalen Lösung über. Das Verformungsverhalten der Proben mit $\xi_g \geq 10^{-6}$ ist dadurch gekennzeichnet, daß nach Erreichen der Maximallast die Proben vom dickeren Ende her nach und nach entlasten. Dies führt zu der aus dem Zugversuch bekannten Einschnürung der Probe, woraus der Steilabfall im Kraft-Verlängerungs-Diagramm resultiert. Dies steht in gutem Einklang mit den aus dem vorigen Kapitel gewonnenen Erkenntnissen zur Verzweigung elastisch-plastischer Körper.

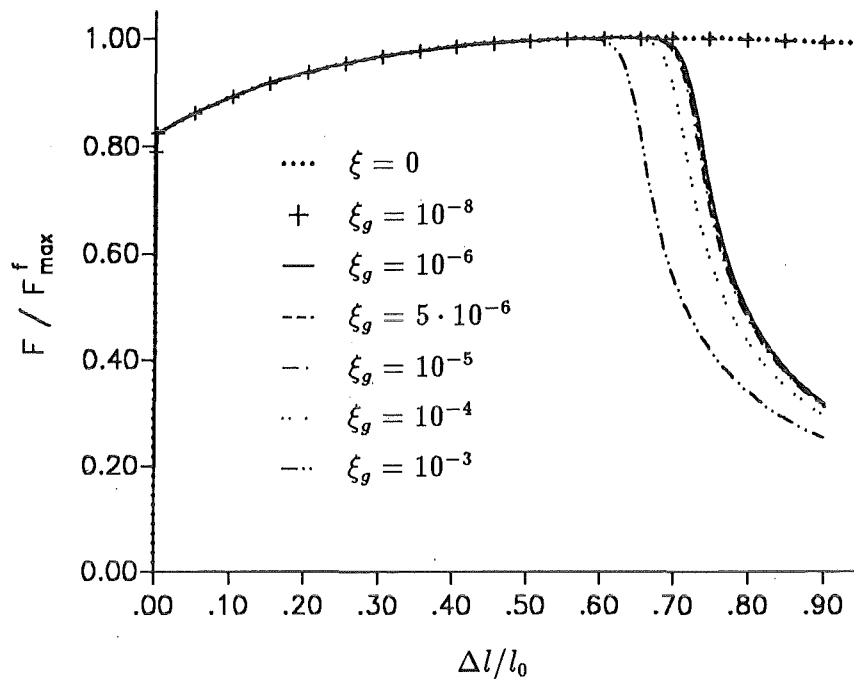


Abb. 6.3: Einfluß der Amplitude $\xi_g r_0$ auf das Verformungsverhalten des Zugstabes:
 $k = 2$.

Die relativ großen Totaldehnungen resultieren aus dem Materialgesetz, da aufgrund der linearen Verfestigung die Instabilitätsbedingung $\sigma = E_t$ erst bei der wahren Dehnung

$$\varepsilon = \varepsilon_e + s = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma - \sigma_y}{E_t} \quad (6.27)$$

$$\Rightarrow \varepsilon_m = \frac{E_t}{E} + \frac{E_t}{2E_t} = \frac{201}{400} = 0.5025 \quad (6.28)$$

erfüllt wird, wodurch beim Kraftmaximum gemäß Gleichung (6.10)₂ eine Totaldehnung $e_m = 65.28\%$ resultiert. Bei der FE-Rechnung wurde für die fundamentale Lösung eine Totaldehnung von 65.45% ermittelt. Dieser Unterschied ergibt sich aus der Annahme der elastischen Inkompressibilität, die zur Herleitung der Instabilitätsbedingung (6.18) unterstellt wurde. JOHNSON/MELLOR geben in [34, S. 251] für den elastisch kompressiblen Zugstab folgende Instabilitätsbedingung an:

$$E_t \Big|_{\sigma_n=R_m} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \Big|_{\sigma_n=R_m} = \frac{\sigma_m}{1 + \frac{(1-2\nu)}{E}\sigma_m} \leq \sigma_m \quad (6.29)$$

Es wird ersichtlich, daß für Querkontraktionszahlen $\nu < 0.5$ die Instabilitätsbedingung bei einem gegebenen Tangentenmodul erst bei höheren Spannungen und somit bei höheren Dehnungen erfüllt wird. FE-Rechnungen ergaben, daß für $\nu \rightarrow 0.5$ die kritischen Größen R_m, e_m sehr genau ermittelt werden.

Da aufgrund des hohen Schlankheitsgrads der Probe die Spannung bei Kraftmaximum und beim Verzweigungspunkt nahe beieinander liegen, kann das Verhältnis σ_c/σ_m mit Hilfe der Gleichung (6.21) unter Verwendung der bekannten Probenabmessungen beim Kraftmaximum F_{maz}^f abgeschätzt werden [31]. Für den Bifurkationsmodus 2 ergibt sich beim Kraftmaximum, unter der Voraussetzung der Volumenkonstanz ($l_0\pi r_0^2 = l_0(1+e)\pi r^2$), folgender Wert für γ :

$$\gamma_m = 2\pi \frac{(1+e_m)^{-1/2} r_0}{(1+e_m) l_0} \quad (6.30)$$

$$= 0.1\pi(1+e_m)^{-3/2} = 0.14784 \quad (6.31)$$

Gleichung (6.21) liefert für diesen Wert als Näherung

$$\frac{\sigma_c}{\sigma_m} \approx 1.0028981 \quad .$$

Für die Totaldehnung am Verzweigungspunkt folgt zunächst aus Gl. (6.27):

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_m} &= \frac{\frac{\sigma_c}{\sigma_m} + \frac{E}{E_t} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_m} - \frac{\sigma_y}{E_t} \right)}{1 + \frac{E}{E_t} \left(1 - \frac{\sigma_y}{E_t} \right)} \\ &= 1.01077 \quad , \end{aligned}$$

woraus mit e_m (s. Gl. (6.28)) und Gleichung (6.10)₂ $e_c = 66.18\%$ abgeschätzt werden kann.

Abbildung 6.4 verdeutlicht den Einschnürvorgang der Zugprobe am Beispiel der globalen Imperfektion mit $\xi_g = 10^{-4}$. Aufgetragen ist zum einen die Verteilung der an der Außenseite des Zugstabs berechneten plastischen Bogenlänge s (plastische Vergleichsdehnung) und zum anderen der Verlauf der plastischen Bogenlänge im engsten Querschnitt. Die Werte auf den Abszissen werden bezüglich der Knotenkoordinaten in der Ausgangskonfiguration aufgetragen.

Bis zum Erreichen der Zugfestigkeit zeigt sich ein nahezu homogener Verzerrungszustand. Mit zunehmender Verlängerung verkleinert sich der Bereich der plastisch belasteten Zone; die Probe schnürt an der Stelle $z = 0$ ein. Die größten Dehnungen und somit auch die höchsten Spannungen werden im Zentrum der zylindrischen Probe ermittelt (s. auch [10, 47, 50, 67]).

Weitere FE-Rechnungen ergaben, daß die Diskretisierung die Ergebnisse dahingehend beeinflusst, daß mit feiner werdendem Netz die Kurven im nachkritischen Bereich steiler abfallen, da die Lokalisierung besser wiedergegeben wird. Die kritischen Lasten selbst werden davon nur geringfügig beeinflusst.

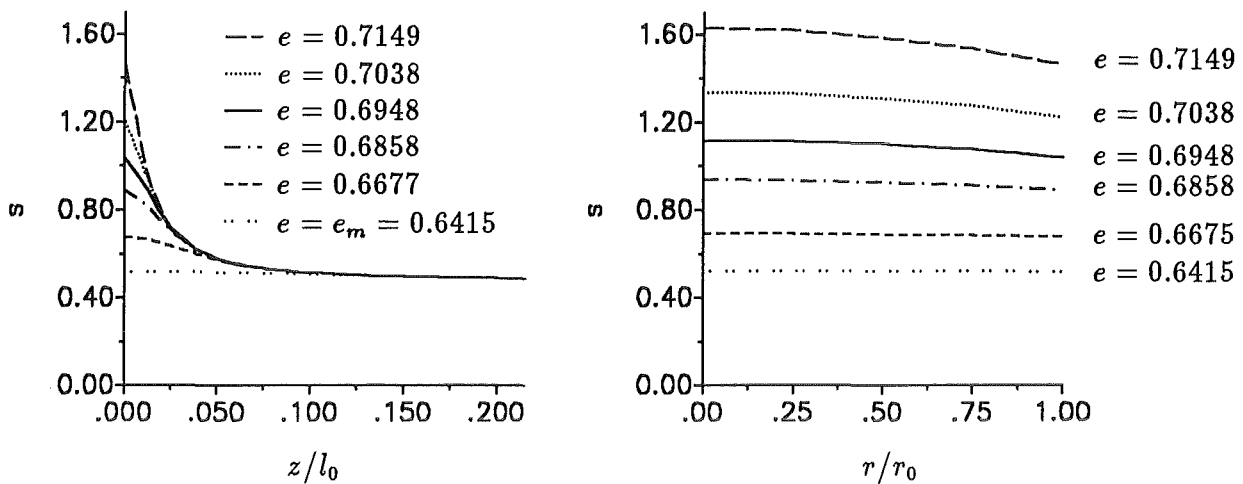


Abb. 6.4: Plastische Bogenlänge s auf der Oberfläche des Zugstabs (links) und im engsten Querschnitt ($z = 0$) (rechts) für verschiedene Totaldehnungen, $k = 2$ und $\xi_g = 10^{-4}$.

Trotz der relativ groben Diskretisierung zeigt sich eine hohe Imperfektionssensitivität. Sehr kleine Imperfektionen werden vom FE-Code aus numerischen Gründen nicht erfaßt und liefern, wie bereits erwähnt, die fundamentale Lösung.

Als nächstes soll die Abhängigkeit des Verformungsverhaltens vom unterstellten Bifurkationsmodus aufgezeigt werden. Dazu wurde gemäß Gleichung (6.24) die Kontur des Zugstabs 1 für die ersten vier Eigenformen mit $\xi_g = 10^{-4}$ berechnet. Die Eigenformen und die aus den FE-Rechnungen ermittelten Kraft-Verlängerungs-Kurven sind in Abbildung 6.5 zu sehen.

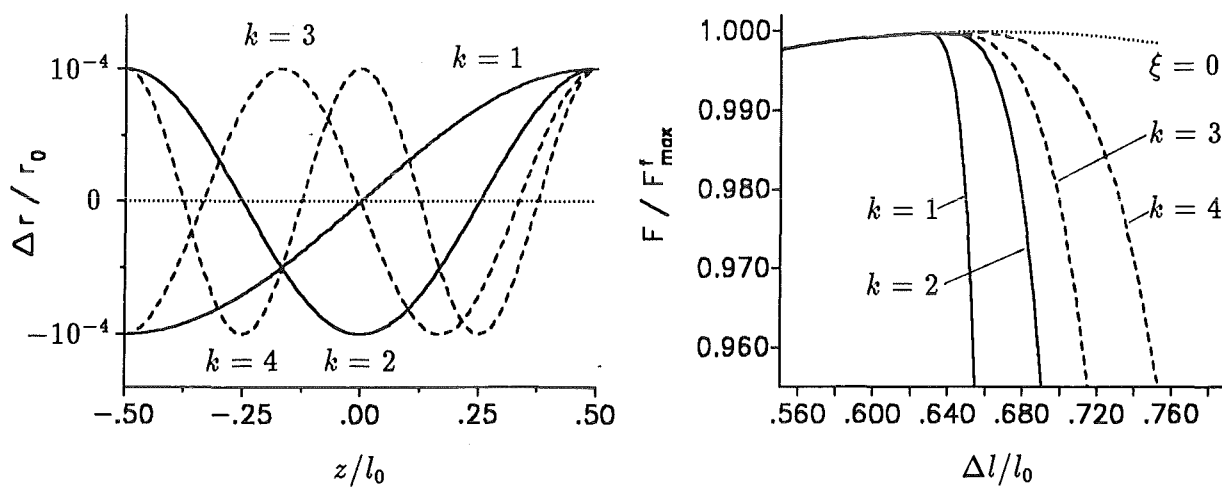


Abb. 6.5: Einfluß der Eigenformen 1-4 (links) auf das Verformungsverhalten des Zugstabs (rechts); Stab 1, $\xi_g = 10^{-4}$.

Es zeigt sich, daß die Zugprobe für $k = 1$ am frühesten (im Sinne einer niedrigeren Totaldehnung) von der fundamentalen Lösung abweicht und am steilsten abfällt. Mit Zunahme der Eigenformen wandert der Punkt, an dem die Kurve von der fundamentalen Lösung deutlich abweicht, hin zu größeren Dehnungen. Dies steht sowohl mit den Ergebnissen der Bifurkationstheorie (s. Gleichung (6.21)) als auch mit experimentellen Ergebnissen im Einklang. Aus Zugversuchen ist bekannt⁵, daß die Bruchdehnung A (s. Abb. 6.1) mit zunehmendem Schlankheitsgrad $l_0/2r_0$ abnimmt. Dieser Zusammenhang ist auch in Abb. 6.5 erkennbar, da die Kraft-Verlängerungskurve des langen Proportionalstabs ($l_0/2r_0 = 10$) für $k = 2$ mit der Kraft-Verlängerungskurve eines mit der ersten Eigenform beaufschlagten kurzen Proportionalstabs ($l_0/2r_0 = 5$) zusammenfällt. Das Verformungsverhalten der Stäbe, denen die dritte und vierte Eigenform vorgegeben wurde, ist dadurch gekennzeichnet, daß die Stäbe jeweils an beiden Wellentälern ($r = r_0(1 - \xi_g)$) einschnüren.

6.3.4 Lokale geometrische Imperfektionen

Zur Untersuchung des Einflusses lokaler geometrischer Imperfektionen wurde die Kontur gemäß der um die Linie r, z_0 symmetrischen Funktion⁶

$$\hat{r}(\xi_l, z) = r_0 - \xi_l r_0 \exp \left[-4 \pi^2 \alpha^2 \left(\frac{z}{l_0} - \frac{z_0}{l_0} \right)^2 \right] ; z = \begin{cases} [-l_0/2, l_0/2] & : \text{Stab 1} \\ [0, l_0/2] & : \text{Stab 2} \end{cases}, \quad (6.32)$$

berechnet, wobei $\xi_l = |\Delta r_{max}|/r_0$ ein Maß für die Tiefe und α ein Maß für die Breite der Imperfektion ist.

Für die in Abbildung 6.6 (links) dargestellten Imperfektionen wurden die Kraft-Verlängerungsdiagramme berechnet. Es wird ersichtlich, daß mit abnehmender Imperfektionsbreite, die durch größere α -Werte gekennzeichnet ist, der Steilabfall zu höheren Totaldehnungen hin verschoben wird. Der für die zweite Eigenform charakteristische Kurvenverlauf bleibt erhalten. Anhand der für die globalen Imperfektionen $\xi_g = 10^{-4}$ und $\xi_g = 10^{-6}$ ermittelten Kraft-Verlängerungsdiagramme ist zu erkennen, daß durch die lokalen Imperfektionen globale Imperfektionen mit kleinerer Amplitude $\xi_g r_0$ approximiert werden (s. auch [76]). Auf eine Variation der Amplitude wurde verzichtet, da kein prinzipiell anderes Verhalten wie bei den globalen Imperfektionen zu erwarten ist.

⁵S. z.B. [42, S. 121], [17, S. 1161]

⁶Diese Funktion wurde aus einer Arbeit von TVERGAARD [76] abgeleitet, der mit einer ähnlichen Funktion die Kontur von Kugelschalen berechnete (s. Kap. 7).

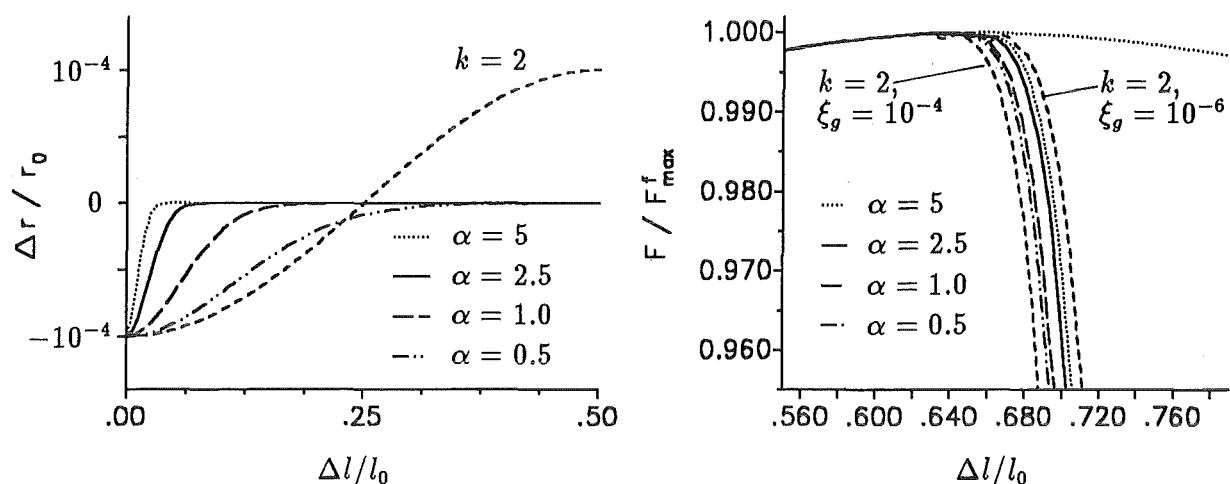


Abb. 6.6: Einfluß lokaler Imperfektionen (links) auf das Verformungsverhalten des Zugstabs (rechts); Stab 2, $\xi_l = 10^{-4}$.

In einem weiteren Schritt wurde am Stab 1 für konstant gehaltene $\xi_l = 10^{-4}$ und $\alpha = 2.5$ die Lage der Imperfektion durch Variation von z_0 verändert. Aus den oberen Diagrammen in Abbildung 6.7 ist zu erkennen, daß für lokale Imperfektionen, die nahe dem Stabende vorgegeben werden, ein ähnlicher Kurvenverlauf wie für den Bifurkationsmodus 1 ermittelt wird.

Bei diesen Imperfektionen schnürte der Zugstab an der Stelle $z = -l/2$ ein. Für die in Abb. 6.7 unten links dargestellten Imperfektionen wurden Kurvenverläufe ermittelt, die dem Kraft-Verlängerungs-Diagramm der Modus-2-Imperfektionen ähnlich sind. Bei diesen Imperfektionen schnürte der Zugstab, nach Erreichen der Zugfestigkeit im „Kerbgrund“, d.h. an der Stelle z_0 der Ausgangskonfiguration, ein. Für alle weiteren, zwischen $z_0 = -11/40$ und $z_0 = -1/16$ liegenden Imperfektionen ergab sich ein deckungsgleicher Kurvenverlauf mit der für $z_0 = -11/40$ berechneten Kurve.

Bei Erhöhung der Imperfektionstiefe auf $\xi_l = 10^{-3}$ ergab sich an der Stelle $z_0 = -5/16$ ebenfalls eine Einschnürung im „Kerbgrund“ sowie einen typischen Modus 2 Kurvenverlauf.

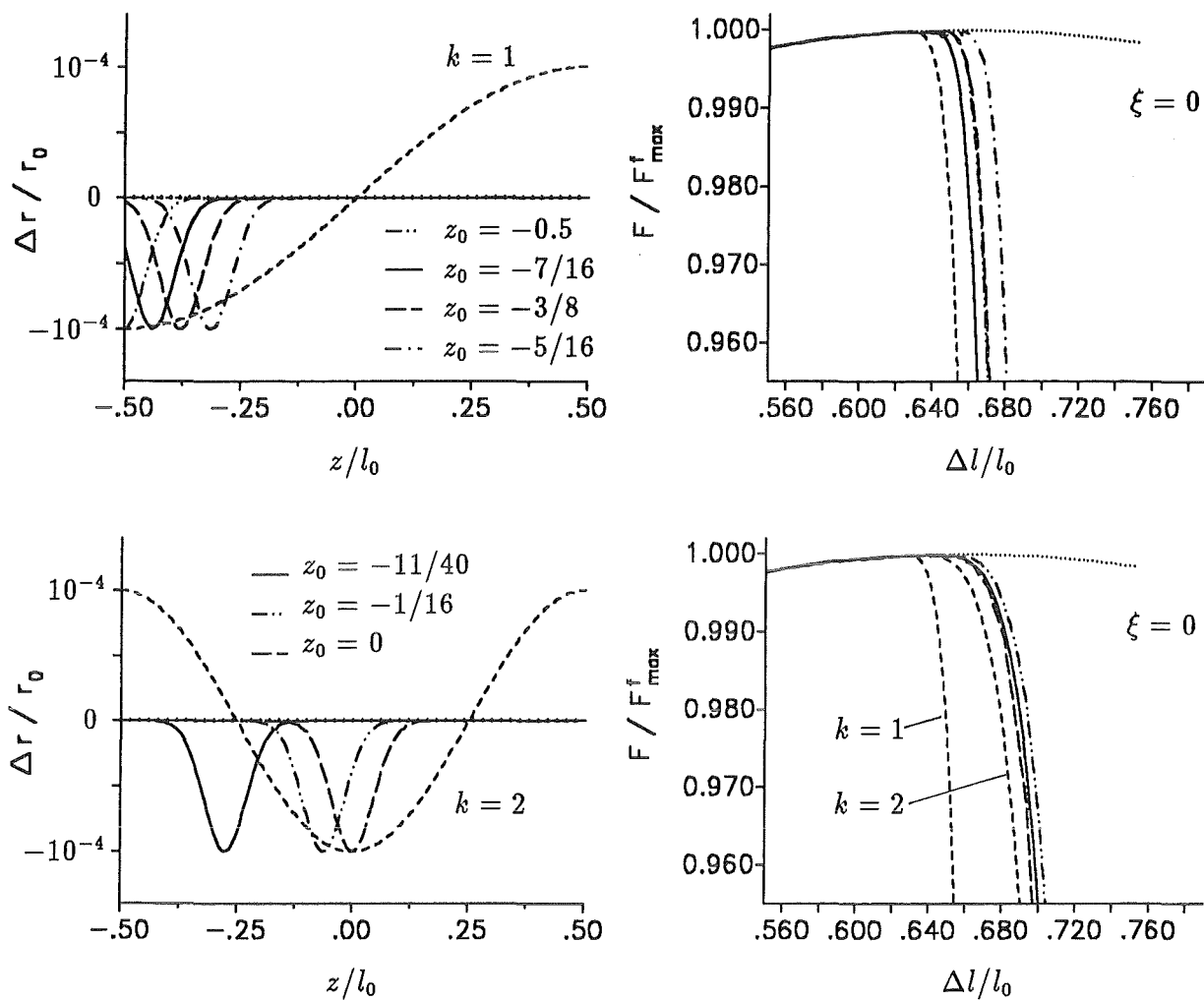


Abb. 6.7: Lokale Imperfektionen, die den Modus 1 (oben) annähern sowie Imperfektionen, die einen typischen Modus 2 Verlauf aufweisen (unten); $\xi_t = \xi_g = 10^{-4}$.

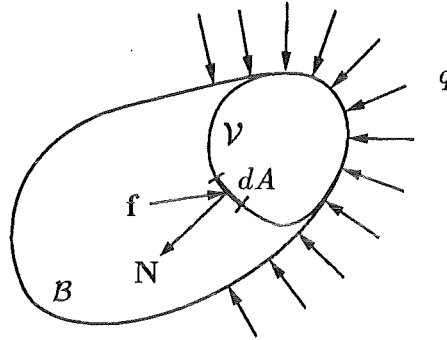
6.3.5 Thermische Imperfektionen

Ziel dieser Untersuchungen ist es, die Auswirkung thermischer Imperfektion auf das Verformungsverhalten thermo-elastisch-plastischer Zugstäbe aufzuzeigen, wobei als Maß für die Imperfektion die Differenz der Tangentenmoduln bei der Maximal- und der Minimaltemperatur herangezogen werden wird. Bei den hier durchgeführten Berechnungen werden ausschließlich die sich mit der Temperatur ändernden Verfestigungseigenschaften berücksichtigt. Die thermomechanische Kopplung, einschließlich der thermoelastischen Effekte, bleibt unberücksichtigt. Dies bedeutet einerseits, daß Thermospannungen vernachlässigt werden, andererseits werden weder bei der instationären Wärmeausbreitungsrechnung die bei plastischen Deformationen entstehenden Temperaturerhöhungen, noch die aus der Spannungsanalyse resultierenden Geometrieänderungen in der Wärmeausbreitungsrechnung berücksichtigt.

Das aus der Wärmeausbreitungsrechnungen ermittelte Temperaturfeld wurde den anschließend durchgeführten Spannungsanalysen als Anfangswert vorgegeben.

Grundgleichungen

Es sei \mathcal{V} ein Volumenelement von B in der Referenzkonfiguration. Der von \mathcal{V} eingenommene Raumbereich sei $R_{\mathcal{V}}$.



Es wird angenommen, daß die Wärmeleitung dem Fourier'schen Gesetz

$$\mathbf{f} = -\mathbf{k} \text{GRAD } \theta \quad (6.33)$$

gehört, wobei \mathbf{f} der Wärmeflußvektor, \mathbf{k} die Konduktivitätsmatrix und $\text{GRAD } \theta$ der Temperaturgradient bezüglich der Referenzkonfiguration sind.

Der durch Konduktion über den Bereich der Oberfläche $\partial R_{\mathcal{V}}$ ins Innere von \mathcal{V} übertragene Wärmestrom ist durch

$$q_k = \int_{\partial R_{\mathcal{V}}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{N} dA \quad (6.34)$$

gegeben, wobei \mathbf{N} die Einheitsnormale des differentiellen Flächenelements dA ist. Mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes (2.77) ergibt sich (6.34) zu

$$q_k = \int_{R_{\mathcal{V}}} \text{DIV } \mathbf{f} dV \quad (6.35)$$

Die Finite Elemente Analyse basiert auf der Leistungsbilanz (s. [23, S. 6.1.1-1 f])

$$\int_{R_{\mathcal{V}}} \rho_R \dot{U} dV - \int_{R_{\mathcal{V}}} \text{DIV } \mathbf{f} dV = \int_{\partial R_{\mathcal{V}}} q_S dA + \int_{R_{\mathcal{V}}} r dV \quad (6.36)$$

in der Referenzkonfiguration. Hierin sind ρ_R die Dichte des Materials, \dot{U} die materielle Zeitableitung der inneren Energie, q_S der über die freie Oberfläche übertragene Wärmestrom und r die volumenspezifischen Wärmequellen. Am freien Rand des Körpers B kann Energie durch aufgeprägte Wärmeströme, Konvektion oder durch Strahlung übertragen werden.

Bei Vernachlässigung von Phasenumwandlungen gilt folgende Beziehung zwischen der temperaturabhängigen Wärmekapazität $c = \hat{c}(\theta)$ und der inneren Energie dU :

$$\hat{c}(\theta) = \frac{dU}{d\theta} \quad . \quad (6.37)$$

Damit ergibt sich aus Gleichung (6.36), unter Berücksichtigung von (6.33):

$$\int_{R_V} \rho c \dot{\theta} dV + \int_{R_V} \text{DIV} (k \text{ GRAD } \theta) dV = \int_{\partial R_V} q_S dA + \int_{R_V} r dV \quad . \quad (6.38)$$

Für den Stab 2 wurden folgende FE-Rechnungen durchgeführt. Im ersten Schritt wurde allen Knoten auf der Linie $z = 0$ die Temperatur θ_2 und den Knoten auf der Linie $z = l_0/2$ die Temperatur θ_1 , mit $\theta_2 > \theta_1$, aufgeprägt. Unter der Annahme einer adiabatischen Mantelfläche wurde eine instationäre Wärmeausbreitungsrechnung durchgeführt. Für eine temperaturunabhängige Wärmediffusivität $a = k\rho/c$ stellt sich für hinreichend lange Zeiten ein lineares Temperaturgefälle ein. Für dieses, nur von z abhängige Temperaturfeld wurden die darauffolgenden Spannungsanalysen durchgeführt.

Für identische elastische Konstanten $E(\theta_1) = E(\theta_2)$, $\nu(\theta_1) = \nu(\theta_2)$ und identische Fließgrenzen $\sigma_y(\theta_1) = \sigma_y(\theta_2)$ wurde ein von $E_t(\theta_1)$ verschiedener Tangentenmodul $E_t(\theta_2) < E_t(\theta_1)$ vorgegeben (s. Abb. 6.8). Aufgrund des aufgeprägten Temperaturfelds wird somit ein sich über die Länge des Zugstabs änderndes Verfestigungsverhalten erzeugt, das zu einem inhomogenen Deformationszustand führt. Als Maß für diese „Materialimperfektionen“ wird der Parameter η eingeführt, der wie folgt definiert ist:

$$\eta := \frac{E'_t(\theta_1) - E'_t(\theta_2)}{E'_t(\theta_2)} = \frac{E'_t(\theta_1)}{E'_t(\theta_2)} - 1 \quad (6.39)$$

$$= \frac{s(\theta_2) - s(\theta_1)}{s(\theta_1)} \Big|_{\sigma(\theta_1) = \sigma(\theta_2)} \quad , \quad (6.40)$$

wobei E'_t gemäß (6.23) berechnet wird.

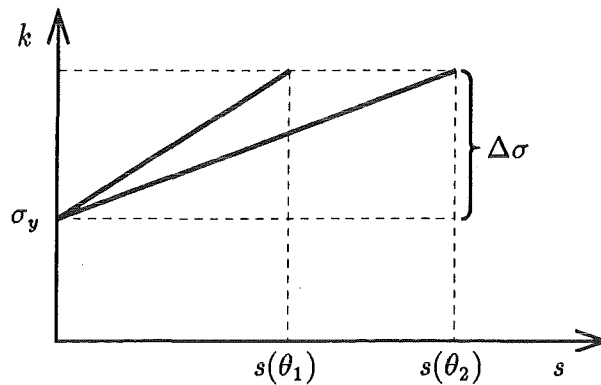


Abb. 6.8: Angenommenes Verfestigungsverhalten $k = \hat{k}(s; \theta)$ der thermo-elastisch-plastischen Stäbe; $E(\theta_1) = E(\theta_2)$, $\nu(\theta_1) = \nu(\theta_2)$, $\sigma_y(\theta_1) = \sigma_y(\theta_2)$.

Abbildung 6.9 zeigt die für verschiedene η -Werte ermittelten Kraft-Verlängerungs-Diagramme. Es wird deutlich, daß analog zu den Untersuchungen zum Einfluß geometrischer Imperfektionen, die Kurvenverläufe sich einer Grenzkurve annähern, die in diesem Fall für $\eta = 10^{-5}$ gegeben ist. Das Verformungsverhalten dieser Stäbe ist auch durch lokale Entlastungen und einer anschließenden Verformungslokalisierung an der Stelle $z = 0$ gekennzeichnet. Für kleinere Imperfektionen springen auch hier die Lösungen auf die fundamentale Lösung über⁷.

⁷Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß beim Übergang von der Lösung für $\eta = 10^{-5}$ zur fundamentalen Lösung folgender numerisch bedingte Effekt beobachtet wurde: Die Kraft-Verlängerungs-Kurven für $\eta = 10^{-6}$, $\eta = 10^{-7}$ und $\eta = 10^{-8}$ lagen zwar auf der Kurve der fundamentalen Lösung, jedoch wurden nach Erreichen der Maximallast im nachfolgenden Inkrement (innerhalb des FE-Laufs) an einigen Integrationspunkten einmalig Entlastungen ermittelt. Die Ursache hierfür ist ein durch den Riks-Algorithmus hervorgerufener Überschwinger der Reaktionskraft. Bei der FE-Rechnung für $\eta = 10^{-9}$ trat dieses Phänomen nicht mehr auf. Aufgrund dessen wurde konsequenterweise erst diese Kurve in Abb. 6.9 aufgetragen. Das gleiche Verhalten zeigte sich auch bei den geometrischen Imperfektionen, jedoch in weniger stark ausgeprägter Form (vgl. Abb. 6.3).

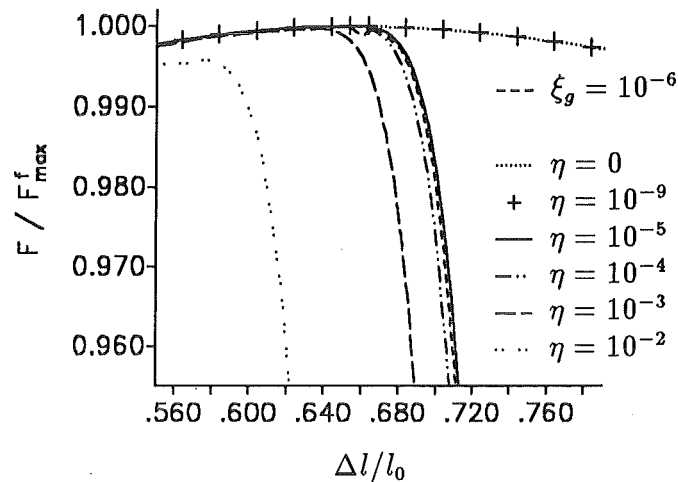


Abb. 6.9: Einfluß von η auf das Verformungsverhalten des mit einem inhomogenen Temperaturfeld beaufschlagten Zugstabs (Stab 2).

6.3.6 Schlußfolgerungen

Die Rechnungen ergaben, daß für hinreichend große Imperfektionen das Verzweigungsverhalten elastisch-plastischer Stäbe mit Hilfe des verwendeten FE-Codes auf der Basis des in Kap. 4.2 erläuterten Materialmodells und unter Berücksichtigung geometrischer Nichtlinearitäten approximiert werden kann. Für gegen Null strebende geometrische oder thermische Imperfektionen findet unterhalb eines unteren Grenzwertes von ξ bzw. η ein Sprung der ermittelten Kraft-Verlängerungs-Kurven auf die Kraft-Verlängerungs-Kurve der fundamentalen Lösung statt.

Lokale geometrische Imperfektionen wirken sich wie globale Imperfektionen kleinerer Amplitude aus, sofern die Lage des Wellentals der lokalen und der globalen Imperfektion übereinstimmt. Weicht der Ort der lokalen Imperfektion vom Wellental des Bifurkationsmodus ab, so wird beim Zugstab je nach Lage und Amplitude der lokalen Imperfektion ein ähnliches Verformungsverhalten (in Sinne der ermittelten Kraft-Verlängerungs-Kurven) wie beim Bifurkationsmodus 1 oder 2 angeregt. Weiterhin konnte gezeigt werden, daß thermische Imperfektionen bei temperaturabhängigem Werkstoffverhalten eine ähnliche Wirkung zeigen wie geometrische.

Somit scheint es prinzipiell durch Variation der Lage von lokalen Imperfektionen hinreichend großer Amplitude möglich zu sein, das Verzweigungsverhalten unbekannter Strukturen zu untersuchen. Umgekehrt stellt sich die Frage, wie sich bei einer zu untersuchenden Struktur eine gegebene lokale Imperfektion auf das Verformungsverhalten auswirkt und ob diese zu einer Verzweigung des Anfangs-Randwertproblems führen kann. Beiden Fragestellungen wird nun in den folgenden Untersuchungen nachgegangen.

Kapitel 7

Kugel unter Innendruck

7.1 Einführung in das Kapitel

Wie bereits in Kapitel 1 erläutert wurde, werden bei dem zu untersuchenden Reaktordruckbehälter solche Imperfektionen vorgegeben, die sich im unteren, kugelförmigen Bereich des Behälters befinden. Da für die zu untersuchende Reaktorgeometrie keine Stabilitäts- und Verzweigungsanalysen bekannt sind, bietet sich zunächst ein Vergleich mit den aus der Literatur bekannten Ergebnissen für eine Kugelschale an.

In diesem Kapitel soll nun demonstriert werden, wie sich bei den Finite Elemente Simulationen globale und lokale axialsymmetrische Imperfektionen auf das Verformungsverhalten einer Kugelschale auswirken. Dazu wurde eine dünnwandige Kugelschale mit denselben Abmessungen generiert, wie sie die Bodenkalotte des in Kap. 8 zu untersuchenden Reaktordruckbehälters aufweist. Sämtlichen FE-Rechnungen wurde ein axialsymmetrisches Verhalten der Kugel unterstellt. Es wurde dasselbe (temperaturabhängige) Verfestigungsverhalten wie im vorigen Kapitel angenommen (s. Kap. 6.3.1 und 6.3.5).

NEEDLEMAN gibt in [48] für eine inkompressible, elastisch-plastische Kugelschale konstanter Temperatur, deren Scherdehnung vernachlässigbar ist, die Instabilitätsbedingung

$$\int_{r_i}^{r_a} \frac{2 E_t - 3 \sigma}{r^4} dr = 0 \quad (7.1)$$

an, wobei r_i und r_a der Innen- bzw. Außenradius der Kugel in der Referenzkonfiguration sind. Weiterhin sind $\sigma = \hat{\sigma}(r)$ die vom Ort abhängige Fließspannung nach v. Mises und $E_t = \bar{E}_t(\sigma) = \hat{E}_t(r)$ der von der Spannung und somit ebenfalls vom Ort abhängige Tangentenmodul. Für eine dünnwandige Kugelschale, die mit einem homogenen Temperaturfeld beaufschlagt ist, ergibt sich daraus

$$\sigma = \frac{2}{3} E_t \quad (7.2)$$

(s. auch [34, S. 257]).

MILES [44] und NEEDLEMAN [48] zeigten, daß der Verlust der Eindeutigkeit inkompressibler,

starrplastischer bzw. elastisch-plastischer axialsymmetrischer Kugelschalen eintritt, sobald

$$\int_{r_i}^{r_a} \frac{E_t - \sigma}{r^2} dr = 0 \quad (7.3)$$

erfüllt wird. NEEDLEMAN wählte zur Auswertung des Bifurkationsfunktionals (5.65) hierbei Legendre-Polynome k -ter Ordnung als Ansatzfunktionen für die Eigenformen, wobei der niedrigste Bifurkationsmodus durch $k = 1$ gegeben ist. Die Ansatzfunktionen für die Komponenten des Geschwindigkeitsfelds in radialer und meridionaler Richtung u_r , u_φ werden für $k = 1$ und $\varphi = [0, \pi]$ zu

$$u_r = u_r(r) \cos(\varphi) \quad (7.4)$$

$$u_\varphi = u_\varphi(r) r \sin(\varphi) \quad (7.5)$$

Für die dünnwandige Kugel reduziert sich (7.3) auf

$$\sigma = E_t \quad (7.6)$$

womit sofort deutlich wird, daß bei der Kugel unter Innendruck die Eindeutigkeit unter der Annahme eines linear oder degressiv verfestigenden Werkstoffs ($E_t > 0$) erst nach Erreichen des maximal ertragbaren Innendrucks verloren geht.

Der Vergleich mit den Ergebnissen aus dem vorigen Kapitel zeigt, daß die Verzweigungsbedingung der dünnwandigen Kugel mit der Instabilitätsbedingung des Zugstabs (6.18) zusammenfällt. Daraus folgt, daß die Kugel bei einem niedrigeren Spannungsniveau σ instabil wird als der Zugstab.

7.2 FE-Rechnungen

7.2.1 Diskretisierung

Den FE-Rechnungen wurde eine Kugel mit einem Innenradius $r_{i,0} = 2560$ mm und einem Außenradius $r_{a,0} = 2708$ mm zugrunde gelegt, woraus sich eine Wandstärke von $w_0 = 148$ mm ergibt. Die Rechnungen wurden für die zwei in Abbildung 7.1 dargestellten FE-Netze durchgeführt. Das Finite-Elemente Netz der Kugel 1 besteht aus 320 8-knotigen axialsymmetrischen Elementen, wobei die Elemente in meridionaler Richtung äquidistant sind. Die Wand wird

7.2.2 Globale Imperfektionen

In Analogie zum vorigen Kapitel wurden die Koordinaten der auf der Innenseite der Kugel 1 liegenden Knoten gemäß

$$\hat{r}(\xi_g, k, \varphi) = r_{i,0} + \xi_g w_0 \cos(k\varphi + \psi) \quad \text{mit} \quad \varphi = [0, \pi] \quad (7.7)$$

berechnet, wobei k die Anzahl der Halbwellen mit der Amplitude $\xi_g = |\Delta r_{max}|/w_0$ und ψ die Phasenverschiebung der Welle ist. Die Phasenverschiebung ist null für $k = 1, 3, \dots$; für $k = 2, 4, \dots$ wurde sie so gewählt, daß sich immer ein Wellental im Äquator der Kugel ($\varphi = \pi/2$) befindet. Die Kugel weist somit für $k = 1$ an der Stelle $\varphi = 0$, die künftig als *unterer Pol* bezeichnet wird, eine um $|\Delta r_{max}|$ kleinere Wandstärke und an der Stelle $\varphi = \pi$ (*oberer Pol*) eine um $|\Delta r_{max}|$ größere Wandstärke auf. Auf eine Streckung in meridionaler Richtung wurde aufgrund der am Zugstab gewonnenen Erkenntnisse (s. S. 53) verzichtet.

Für $k = 1$ wurde, unter Verwendung der Materialparameter $E_i/E = 0.005$, $E_i/\sigma_y = 2$ und $\nu = 0.3$, für einen vorgeschlagenen Innendruck p mit Hilfe des Pfadverfolgungsalgorithmus das Verformungsverhalten der Kugel für unterschiedliche Amplituden $\xi_g w_0$ berechnet.

Die Ergebnisse der FE-Rechnungen sind in Abbildung 7.2 dargestellt, in der der normierte Innendruck über der relativen Innenvolumenänderung der Kugel aufgetragen ist. Die Größe p_{max}^f ist der maximal ertragbare Innendruck der perfekten Kugel (fundamentale Lösung) und V_0 ist das Innenvolumen der Kugel in der Ausgangskonfiguration. Das aktuelle Innenvolumen V , das zur Berechnung von $\Delta V = V - V_0$ benötigt wird, wurde aus den Knotenverschiebungen berechnet.

Es zeigen sich ähnliche Ergebnisse wie beim Zugstab. Mit abnehmender Imperfektionsgröße nähern sich die Kurven einer Grenzkurve an, die im Fall der Kugel in etwa durch den Verlauf für $\xi_g = 5 \cdot 10^{-5}$ gegeben ist. Kleinere Imperfektionen führen zu einem deckungsgleichen Verlauf mit der fundamentalen Lösung. Diese sehr kleinen Amplituden werden vom FE-Code aus numerischen Gründen nicht mehr erfaßt (vgl. Kap. 6.3.3). Nach Erreichen des Maximaldrucks p_{max} werden für Werte $\xi_g \geq 5 \cdot 10^{-5}$, ab einem kritischen Innenvolumen V_E elastische Entlastungen ermittelt. Die Entlastung beginnt an der Außenseite des oberen Pols der Kugel (s. auch TVERGAARD [76]).

Mit zunehmender Amplitude nimmt der Abstand zwischen dem Punkt der Maximallast und dem Punkt der beginnenden Entlastung deutlich ab, wie aus der Abbildung 7.3 zu entnehmen ist. Es wird deutlich, daß der maximal ertragbare Innendruck p_{max} und das zugehörige

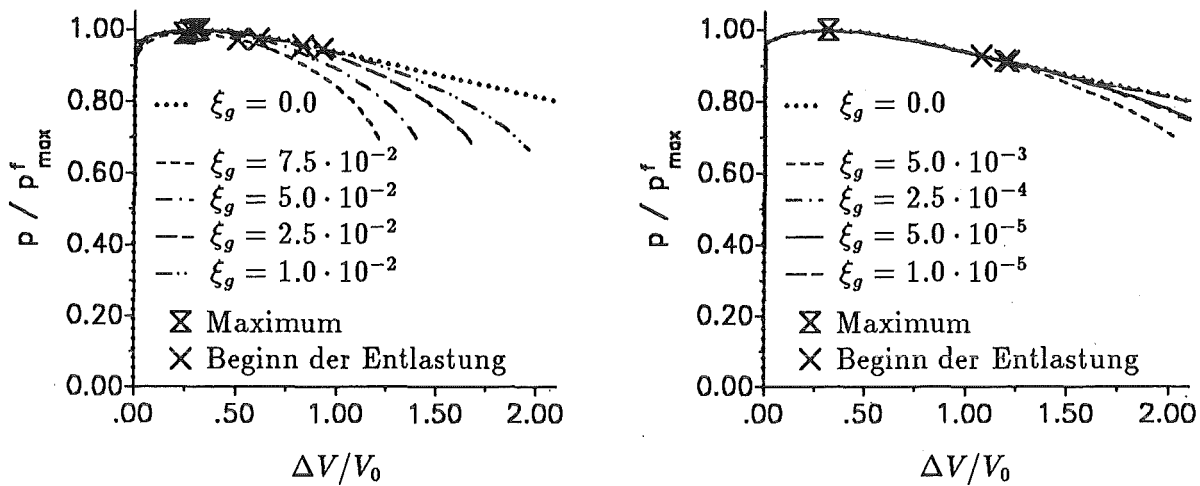


Abb. 7.2: Einfluß der Amplitude $\xi_g w_0$ auf das Verformungsverhalten der Kugel 1;
 $k = 1, w_0 = 148\text{mm}$.

Innenvolumen V_{max} erst für Amplituden $\xi_g > 10^{-2}$ erkennbar beeinflusst werden, während eine relativ stark ausgeprägte Abhängigkeit zwischen dem Innendruck p_E , bei dem zum erstenmal Entlastungen ermittelt werden bzw. dem zugehörigen Innenvolumen V_E und der Amplitude erkennbar wird. Diese Imperfektionen wirken sich somit relativ stark auf das *nachkritische* Verformungsverhalten der Kugel aus.

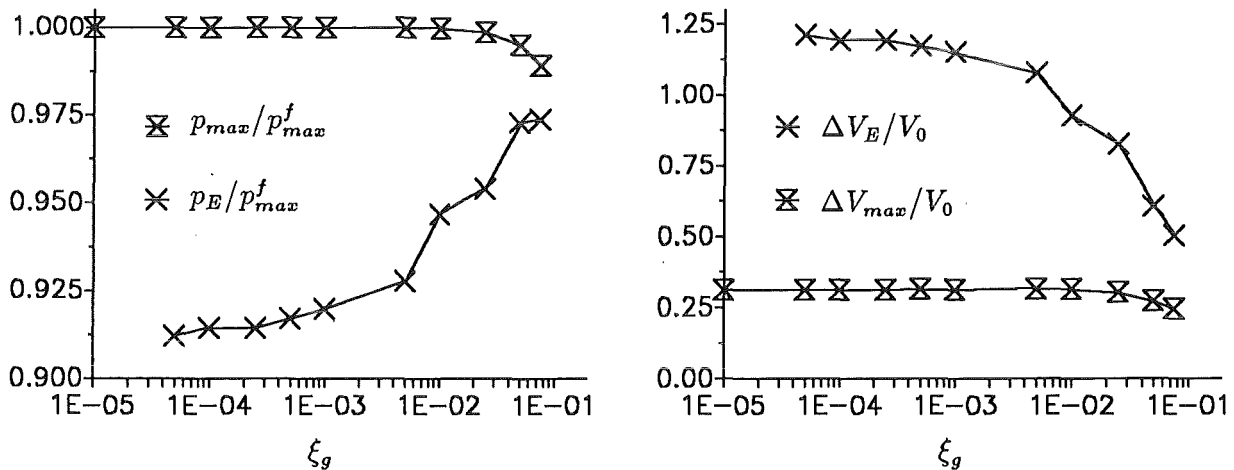


Abb. 7.3: Einfluß der Amplitude $\xi_g w_0$ der ersten Eigenform auf den maximal ertragbaren Innendruck p_{max} und auf den Innendruck p_E , für den zum erstenmal Entlastungen ermittelt werden (links). Rechts sind die zu p_{max} und p_E gehörigen Innenvolumina aufgetragen.

Abbildung 7.4 verdeutlicht die Verformungslokalisierung der Kugel. Im Gegensatz zum Zugstab, bei dem sich nach Erreichen der Maximallast die plastische Zone mit Zunahme der To-

taldehnung rasch verkleinert (s. Abb. 6.4), zeigt die Kugel bei diesen Modus-1-Imperfektionen diese Tendenz nicht. Nach Erreichen des maximal ertragbaren Innendruckes p_{max} wird die Kugel weiterhin in jedem Punkt kontinuierlich plastisch verformt, bis ab p_E Entlastungen ermittelt werden. Bei weiterer Zunahme des Innenvolumens verkleinert sich die plastisch belastete Zone, die aus dem Zugversuch bekannte Einschnürung zeigt sich jedoch nicht. Dieser Sachverhalt ist indirekt auch an den schwach abfallenden $p - \Delta V$ -Kurven erkennbar.

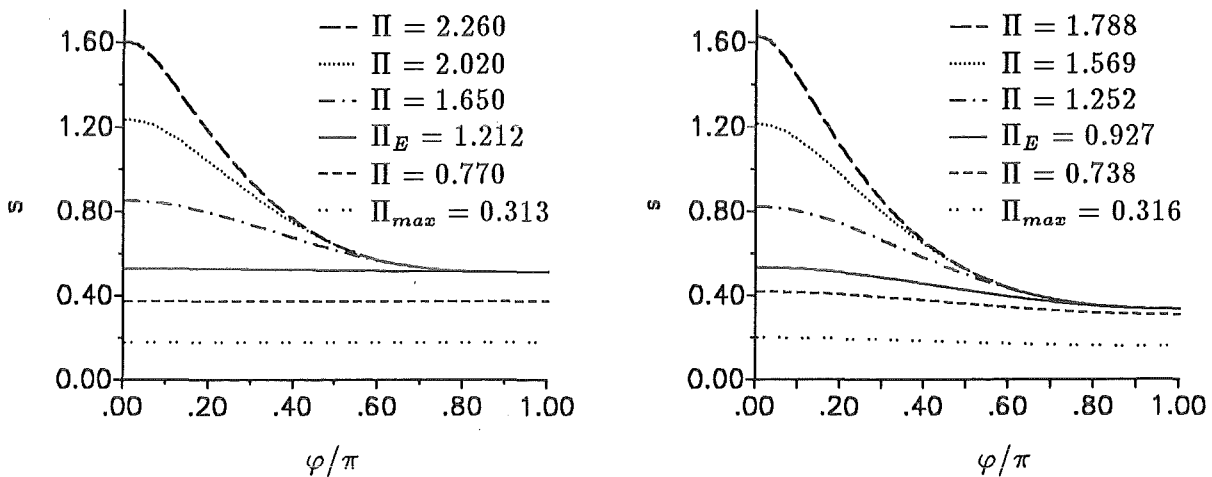


Abb. 7.4: Plastische Bogenlänge s entlang der Kugelinseite für verschiedene relative Innenvolumenänderungen $\Delta V/V_0 =: \Pi$; $k = 1$ und $\xi_g = 5 \cdot 10^{-5}$ (links), $\xi_g = 10^{-2}$ (rechts).

Während sich beispielsweise bei einer Kugel mit der maximalen plastischen Bogenlänge $s \approx 1.6$ die plastisch belastete Zone vom unteren Pol bis $\varphi/\pi \approx 0.45$ hin erstreckt, so erfährt der Zugstab bei $s \approx 1.6$ nur noch in unmittelbarer Umgebung der Symmetrieebene plastische Deformationen (vgl. Abb. 6.4).

Für den Bifurkationsmodus 1 zeigt sich für $\xi_g = 5 \cdot 10^{-5}$ eine gute Übereinstimmung zwischen den kritischen Werten $\bar{\sigma}_m/E_t$, $\bar{\sigma}_E/E_t$ und den analytischen Lösungen (7.2) und (7.6), wobei $\bar{\sigma}$ als der Mittelwert der Vergleichsspannungen am Innenradius und am Außenradius definiert wird, d.h. $\bar{\sigma} = (\sigma(r_i) + \sigma(r_a))/2$. Aus

$$\sigma = E'_t s + \sigma_y$$

folgt mit (6.23) und den hier zugrunde gelegten Materialparametern

$$\frac{\bar{\sigma}}{E_t} = \frac{200}{199} \bar{s} + \frac{1}{2} \quad (7.8)$$

Die im unteren Pol für p_{max} und p_E aus den Mittelwerten der plastischen Bogenlängen $\bar{s} = (s(r_i) + s(r_a))/2$ mit Hilfe von (7.8) berechneten kritischen Verhältnisse ergeben sich zu $\bar{\sigma}_m/E_t = 0.6769$ und $\bar{\sigma}_E/E_t = 1.0568$. Diese Werte sind jedoch etwas zu hoch, da aufgrund von $\nu = 0.3$ die kritischen Werte nach oben verschoben werden (s. auch Abb. 7.8), wie bereits beim Zugstab auf Seite 54 erläutert wurde. Der Vergleich mit den für $\xi_g = 10^{-2}$ ermittelten Verteilungen der plastischen Bogenlängen zeigt ebenfalls, daß die Kugel instabil wird bzw. entlastet, wenn im unteren Pol in etwa die kritischen Werte $\bar{\sigma}_m = 2/3 E_t$ bzw. $\bar{\sigma}_E = E_t$ erreicht werden.

Im nächsten Schritt wurde der Einfluß der Anzahl der Halbwellen k auf das Verformungsverhalten der Kugel untersucht. Abbildung 7.5 verdeutlicht am Beispiel $\xi_g = 10^{-2}$, daß die $p - \Delta V$ -Kurven für $k = 2$ und $k = 4$ im dargestellten Bereich auf der fundamentalen Lösung liegen, während für $k = 1$ und $k = 3$ bereits für $\Delta V/V_0 < 1$ Entlastungen ermittelt werden können.

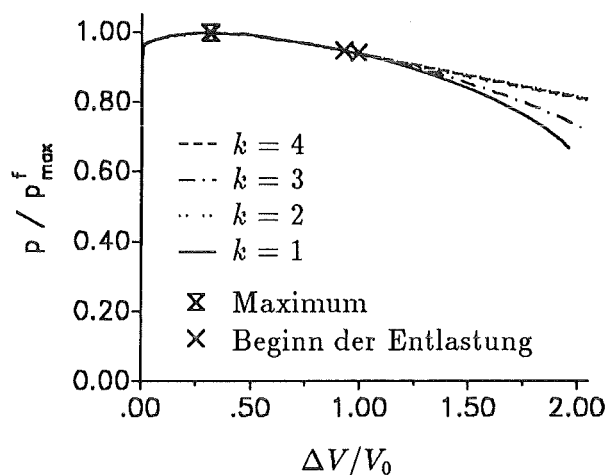


Abb. 7.5: Einfluß der Anzahl der Halbwellen k auf das Verformungsverhalten der Kugel; $\xi_g = 10^{-2}$.

Für die Eigenmoden mit einer ungeraden Anzahl von Halbwellen nimmt entsprechend der beim Zugstab ermittelten Ergebnissen die Wirkung der Imperfektionen mit zunehmender Anzahl der Halbwellen ab. Dies äußert sich durch eine Verschiebung des Punktes der beginnenden Entlastung hin zu größeren Innenvolumina. Bei den um $\varphi = \pi/2$ symmetrischen Imperfektionen wurde für $k = 2$ bei $\Delta V/V_0 = 4.674$ der Beginn der Entlastung festgestellt. Für $k = 4$ konnten selbst bei einer relativen Innenvolumenänderung von $\Delta V/V_0 \approx 5.5$ noch keine Entlastungen ermittelt werden. Für beide Imperfektionen wurde jedoch ein niedrigerer maximal ertragbarer Innendruck als für $k = 1$ ermittelt.

Den Vergleich zwischen den Verteilungen der plastischen Bogenlängen für $k = 1$ und $k = 2$ zeigt Abbildung 7.6. Die mit der um den Äquator symmetrischen Imperfektion versehenen Kugel entlastet erst bei relativ hohen Vergleichsdehnungen, wobei sich nach Beginn der Entlastung die plastisch belastete Zone bei weiterer Zunahme des Innenvolumens rasch verkleinert. Dies führt zu einem, wie bereits vom Zugstab bekannten Steilabfall im Last-Weg-Diagramm, auf dessen Auftragung in diesem Zusammenhang jedoch verzichtet wurde. Bei $\Delta V/V_0 = 5.104$ werden beispielsweise nur in unmittelbarer Umgebung des Äquators plastische Belastungen ermittelt.

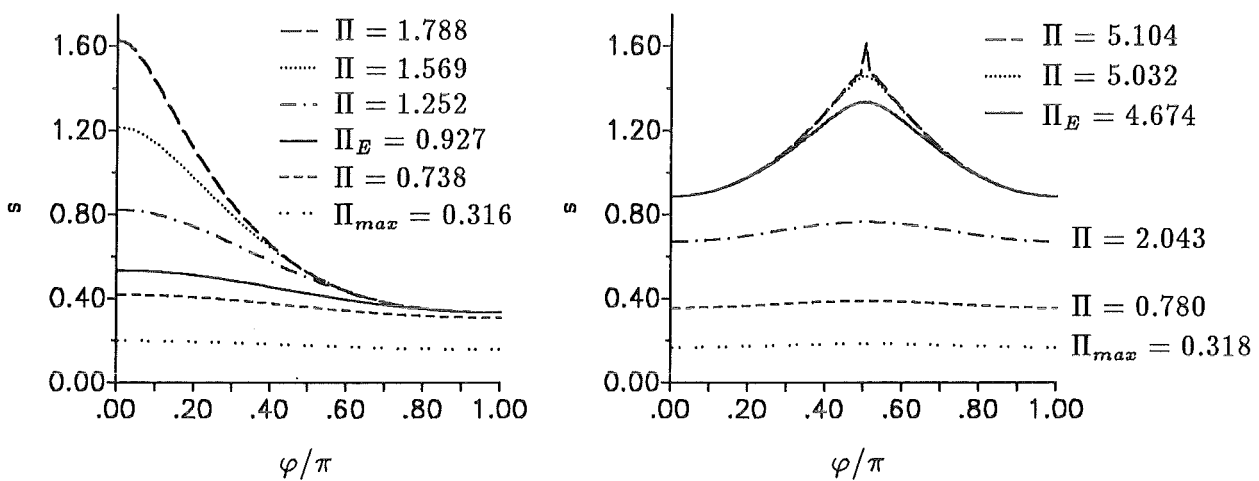


Abb. 7.6: Plastische Bogenlänge entlang der Innenseite der Kugel für $k = 1$ (links) und $k = 2$ (rechts); $\Pi := \Delta V/V_0$; $\xi_g = 10^{-2}$.

In einer weiteren FE-Rechnung wurde eine nichtphasenverschobene Vollwelle (d.h. $k = 2$, $\psi = 0$) vorgegeben. Dies bedeutet, daß die Wandstärke im oberen und im unteren Pol um $\xi_g w_0 = 1.48\text{mm}$ verringert und im Äquator um denselben Betrag erhöht wurde. Es ergab sich für diese Kontur ein um 0.335% höherer Versagensdruck als bei der perfekten Kugel. Für diese Kontur wurden ab einer maximalen plastischen Vergleichsdehnung von $s \approx 1.7$ bei $\Delta V/V_0 \approx 4.7$ vom Äquator ausgehende Entlastungen ermittelt. Eine analoge Rechnung ergab beim Zugstab einen nahezu deckungsgleichen Verlauf mit der in Abb. 6.5 für $k = 2$ dargestellten Kurve. Der Stab schnürte an beiden Enden ein.

7.2.3 Lokale geometrische Imperfektionen

Analog zu den am Zugstab durchgeführten Untersuchungen (s. Kap. 6.3.4), wurden die Koordinaten der auf der Innenseite der Kugel liegenden Knoten mit Hilfe der um die Linie r, φ_0

symmetrischen Funktion

$$r_i = \hat{r}_i(\xi_i, \alpha, \varphi, \varphi_0) = r_{i,0} + \xi_i w_0 \exp[-4\alpha^2(\varphi - \varphi_0)^2] \quad , \text{ mit } \varphi = [0, \pi] \quad (7.9)$$

neu berechnet. Die axialsymmetrische Imperfektion befindet sich für $\varphi_0 = 0$ im unteren Pol und für $\varphi_0 = \pi/2$ am Äquator der Kugel. Die Ergebnisse der für $\xi_i = |\Delta r_{max}|/w_0 = 0.05$ und $\alpha = 2.5$ für verschiedene $\varphi_0 = [0, \pi/2]$ durchgeführten FE-Rechnungen sind in Abbildung 7.7 dargestellt.

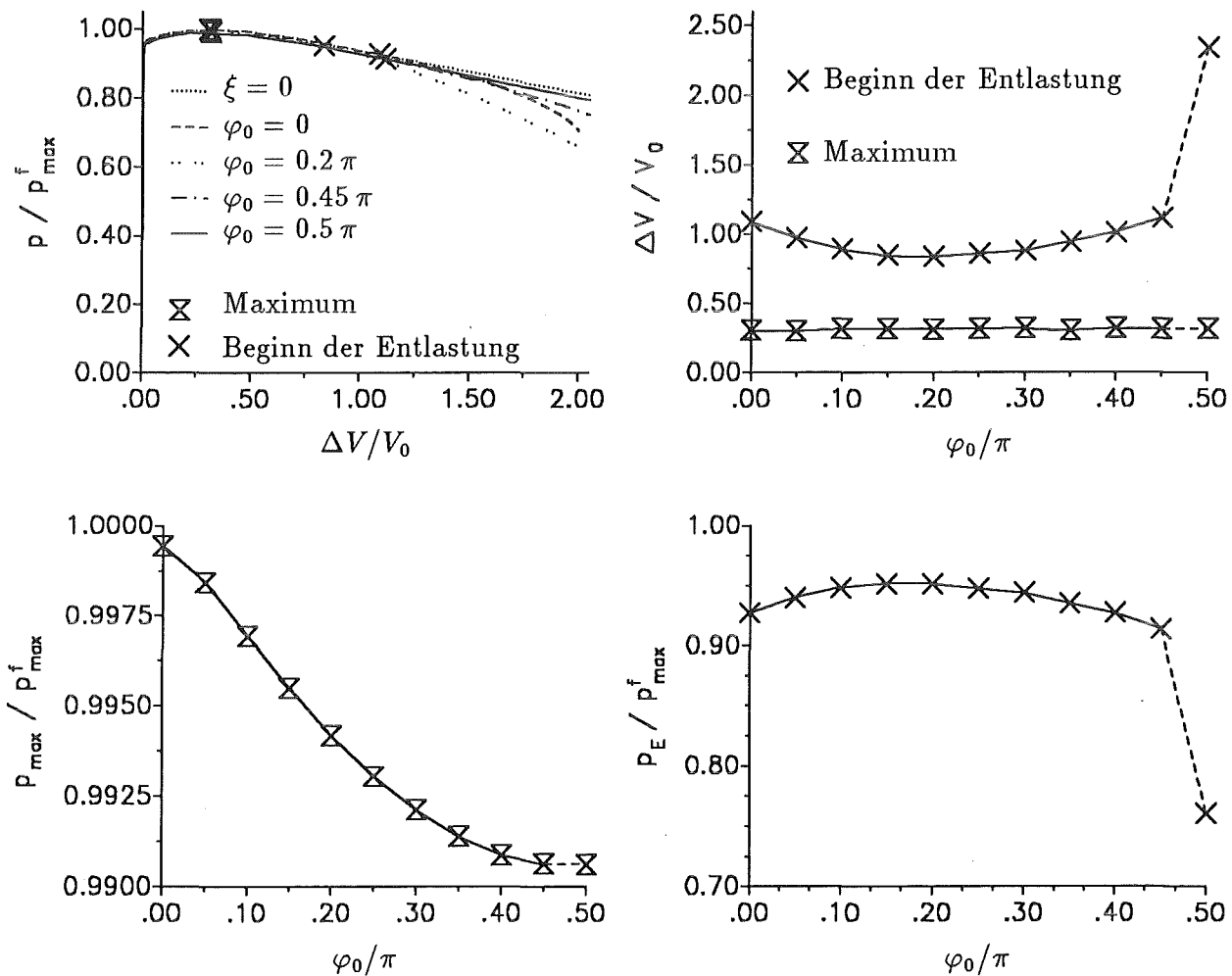


Abb. 7.7: Abhängigkeit der Drücke p_{max} und p_E und der zugehörigen Innenvolumina von der Lage der Kerbe ($\xi_i = 0.05, \alpha = 2.5$).

Es zeigt sich eine schwache, aber eindeutige Abhängigkeit des maximal ertragbaren Innendrucks von der Lage der Imperfektion. Während der Maximaldruck für zunehmendes φ_0 kontinuierlich abnimmt, zeigt sich für p_E ein anderes Verhalten. Es ist ersichtlich, daß p_E zunächst ansteigt, für Imperfektionen mit $\varphi_0 \approx 0.2\pi$ maximal ist, danach kontinuierlich abnimmt und an der Stelle $\varphi_0 = \pi/2$ auf den Minimalwert springt. Dieser niedrige Innendruck geht mit einer großen

Innenvolumenzunahme einher. Der schwache Abfall der $p-\Delta V$ -Kurven deutet an, daß sich nach dem Beginn der Entlastung die plastisch belastete Zone in meridionaler Richtung über weite Bereiche hin erstreckt, wobei die maximalen plastischen Vergleichsdehnungen (und somit auch die maximalen Vergleichsspannungen) am Ort des Wellentals der Imperfektion (φ_0) ermittelt werden. Lediglich bei der sich im Äquator befindlichen Imperfektion ergab sich, nachdem die Kugel bei $\Delta V/V_0 = 2.34$ zum erstenmal entlastete, eine sich rasch¹ entwickelnde Einschnürung. Für eine im unteren Pol vorgegebene lokale Imperfektion mit der Amplitude $\xi_1 w_0$ wird somit das Verhalten einer Kugel approximiert, die mit einer globalen Imperfektion kleinerer Amplitude beaufschlagt ist. Auf eine grafische Darstellung dieses Sachverhalts wird verzichtet, da prinzipiell kein anderes Verhalten als beim Zugstab auftritt (vgl. S. 57 f).

Diese Ergebnisse stehen in Einklang mit den Resultaten von TVERGAARD [76], der mit Hilfe von Finite-Elemente Rechnungen unter anderem den Einfluß lokaler, axialsymmetrischer Imperfektionen am Pol und am Äquator auf das Verformungsverhalten der Kugel untersuchte. Eine Variation von φ_0 wurde jedoch nicht durchgeführt. Weiterhin überlagerte er eine lokale Imperfektion am Äquator dem Bifurkationsmodus 1 ($k = 1$). Es zeigte sich, daß die zusätzlich am Äquator eingebrachte lokale Imperfektion keinen wesentlichen Einfluß auf das Verformungsverhalten der Kugel hatte. Daraus folgerte er, daß der Modus 1, der zu einer Verformungslokalisierung im Pol führt, der bevorzugte Versagensmodus ist. Er fügte jedoch mit dem Hinweis auf experimentelle Arbeiten an dünnen Platten hinzu, daß sich vom Pol ausgehend ein Scherband in meridionaler Richtung ausbilden könnte.

Für die mögliche Ausbildung eines Scherbandes, das sich bei einer punktförmigen Imperfektion entlang dem Rand eines durch diesen Punkt laufenden Großkreises² ausbreitet, sprechen auch experimentelle Arbeiten von MARIN ET AL. [43] aus dem Jahre 1948. Dort wurden für Temperaturen zwischen -25 und $+80$ Fahrenheit (ca. -31 bis $+27^\circ\text{C}$) Berstversuche an ölgefüllten Hohlkugeln durchgeführt. Die Kugeln wurden aus zwei miteinander verschweißten und anschließend geglühten, halbkugelförmigen Stahlblechen (ASTM-Spezifikation A-285-46 Grade C) hergestellt. Bei dem bei 27°C durchgeführten Berstversuch riß der Behälter, ausgehend von dem der Öleintrittsöffnung diametral liegenden Punkt, entlang des Randes eines Großkreises und somit in Richtung der Öleintrittsöffnung auf. Die Schweißnaht lag senkrecht dazu.

¹Im Sinne einer weiteren Volumenzunahme.

²Zitat aus [5, S. 200]: „Unter einem Großkreis mit dem Radius R versteht man einen ebenen Kugelschnitt, dessen Schnittebene durch den Kugelmittelpunkt geht.“

7.2.4 Lokale thermische Imperfektionen

Bevor der Einfluß von lokalen thermischen Imperfektionen aufgezeigt wird, soll das Verhalten einer Kugel, die ein lediglich von Radius abhängiges Temperaturfeld aufweist, demonstriert werden. Dazu wurde allen auf der Innenseite der Kugel liegenden Knoten die Temperatur θ_2 aufgeprägt. Die Knoten auf der Außenseite wurden auf der Anfangstemperatur θ_1 gehalten. Bei Vorgabe einer temperaturunabhängigen Wärmediffusivität stellt sich für diese Geometrie bei der instationären Wärmeausbreitungsrechnung nach hinreichend langer Zeit (stationärer Zustand) eine nahezu lineare Temperaturverteilung in radialer Richtung ein.

Für diese Temperaturverteilung sowie für ein homogenes Temperaturfeld $\bar{\theta} = (\theta_1 + \theta_2)/2$ wurde mit den temperaturunabhängigen Materialparametern E, σ_y, ν (s. Kap. 6.3.5) und den temperaturabhängigen Materialparametern

$$E_t(\theta_1)/E = 0.005, \quad E_t(\theta_1)/\sigma_y = 2, \quad \nu = 0.3 \quad (7.10)$$

$$E_t(\theta_1)/E_t(\theta_2) = 4/3 \Rightarrow \eta = 0.335 \quad (7.11)$$

das Verhalten der Kugel berechnet, wobei η gemäß (6.39) definiert wird. Thermoelastische Effekte blieben auch hier unberücksichtigt. Aufgrund der besonderen Wahl der Materialparameter und der Temperaturverteilung fallen beim maximal ertragbaren Innendruck p_{max} die in Abbildung 7.8 dargestellten Dehnungsverteilungen zusammen, während die Spannungsverteilung bei dem inhomogenen Temperaturfeld aufgrund des nach außen hin zunehmenden Tangentenmoduls ebenfalls nach außen hin ansteigt. Die Größe $\sigma_m(\bar{\theta})$ ist die für

$$E_t(\bar{\theta}) = \frac{E_t(\theta_1) + E_t(\theta_2)}{2} = \frac{7}{8} E_t(\theta_1) \quad (7.12)$$

mit Hilfe von Gleichung (7.2) ermittelte Vergleichsspannung beim Druckmaximum.

Es ist deutlich der integrale Charakter der Instabilitätsbedingung (s. Gl. (7.1)) zu erkennen. Die horizontalen Linien in Abb. 7.8 sind die gemäß der Instabilitätsbedingung für die dünnwandige Kugel (7.2) ermittelte Spannung und die zugehörige plastische Bogenlänge beim maximal ertragbaren Innendruck. Die Differenz zwischen den mit den Materialparametern (7.10) und (7.11) ermittelten Kurven und dem theoretischen Wert resultiert aus der zur Herleitung von (7.2) unterstellten Inkompressibilität des Materials. Eine Rechnung auf der Basis $\nu = 0.499$ zeigt, daß diese Gleichung eine gute Näherung für die hier untersuchte Kugelschale ist.

Zur Untersuchung des Einflusses lokaler thermischer Imperfektionen wurde allen auf der Innenseite der Kugel im Bereich $\varphi_0 \pm 3.75^\circ$ liegenden Knoten die Temperatur θ_2 aufgeprägt. Allen

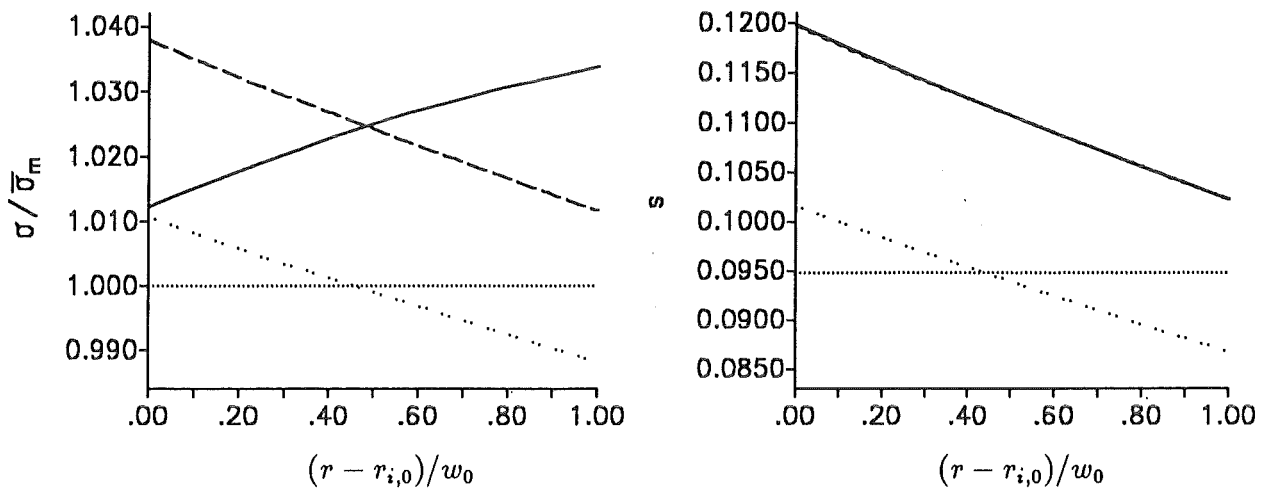


Abb. 7.8: Die Spannungsverläufe (links) und die Verteilung der plastischen Bogenlänge in der Wand der geometrisch perfekten Kugel bei p_{max} für ein homogenes Temperaturfeld $\bar{\theta}$ (---) und ein nur vom Radius abhängiges Temperaturfeld (—) für $\nu = 0.3$ sowie für $\bar{\theta}$ mit $\nu = 0.499$ (· · ·).

anderen auf der Außen- und Innenseite liegenden Knoten wurde die Anfangstemperatur θ_1 vorgegeben. In Abbildung 7.9 ist exemplarisch für $\varphi_0 = 15^\circ$ das der anschließend durchgeführten Spannungsanalyse vorgegebene Temperaturfeld skizziert.

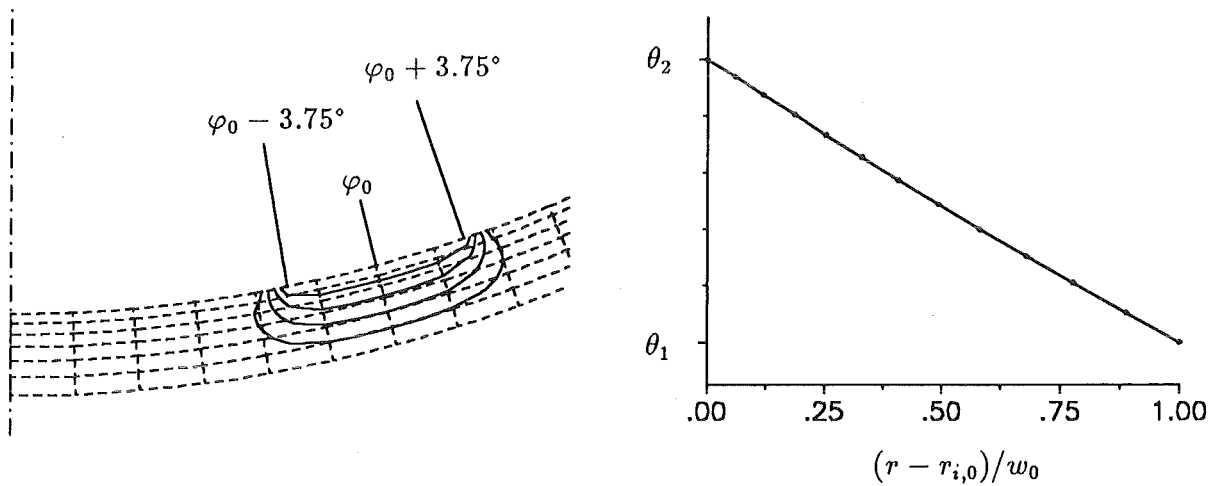


Abb. 7.9: Die dem Spannungslauf für $\varphi_0 = 15^\circ$ zugrunde gelegte Temperaturverteilung. Im linken Bild sind die Isolinien $\theta_2 - 0.2n\Delta\theta$, mit $n = 1, 2, 3, 4$, eingezeichnet. Das rechte Bild zeigt die Temperaturverteilung in radialer Richtung an der Stelle $\varphi = \varphi_0$.

Die Ergebnisse der für die verschiedenen Lagen der Wärmeeinflußzone durchgeführten Rechnungen zeigt Abbildung 7.10. Für die kritischen Drücke p_{max} und p_E zeigt sich ein ähnlicher

Verlauf wie bei den im vorigen Abschnitt gezeigten geometrischen Imperfektionen (s. auch Abb. 7.7). Während der Maximaldruck mit größer werdender Ringfläche abnimmt, steigt p_E zunächst an, um ab $\varphi_0 \approx 35^\circ \approx 0.2\pi$ wieder abzufallen. Wie im vorigen Abschnitt sind bei $\varphi_0 = 90^\circ$ erst für ein relativ großes Innenvolumen V_E und somit bei einem relativ niedrigen Innendruck p_E Entlastungen festzustellen. Diese Imperfektion nähert das für $k = 2$ ermittelte Verhalten an.

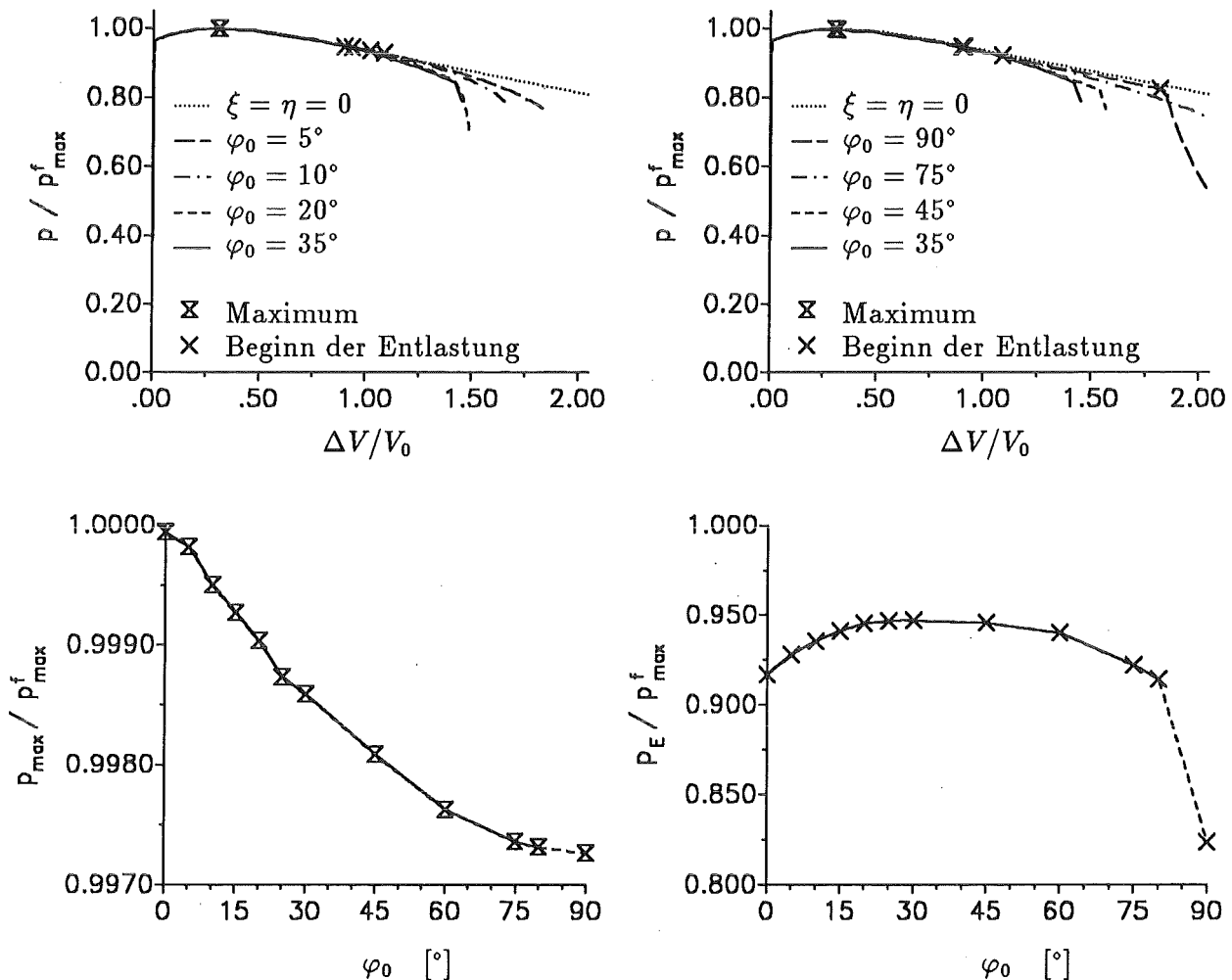


Abb. 7.10: Verformungsverhalten der Kugel (oben) sowie die kritischen Drücke p_{max} und p_E (unten) in Abhängigkeit von der Lage des Zentrums der Temperaturimperfektion φ_0 ; $\eta = 0.335$.

Für $\varphi_0 = 90^\circ$ fällt nach Erreichen von p_E die $p - \Delta V$ -Kurve steil ab, während beispielsweise die Kurve für $\varphi_0 = 35^\circ$ nach Erreichen von p_E relativ flach verläuft und ab einem kritischen Innenvolumen steil abfällt. Der Steilabfall der $p - \Delta V$ -Kurven ist dadurch gekennzeichnet, daß es im Gegensatz zu dem für den Bifurkationsmodus 1 ermittelten Verhalten zu einer Verformungslagerung in unmittelbarer Umgebung der Imperfektion kommt. Dies wird im folgenden für die Imperfektion mit $\varphi_0 = 10^\circ$, $\varphi_0 = 35^\circ$, $\varphi_0 = 75^\circ$ und $\varphi_0 = 90^\circ$ demonstriert.

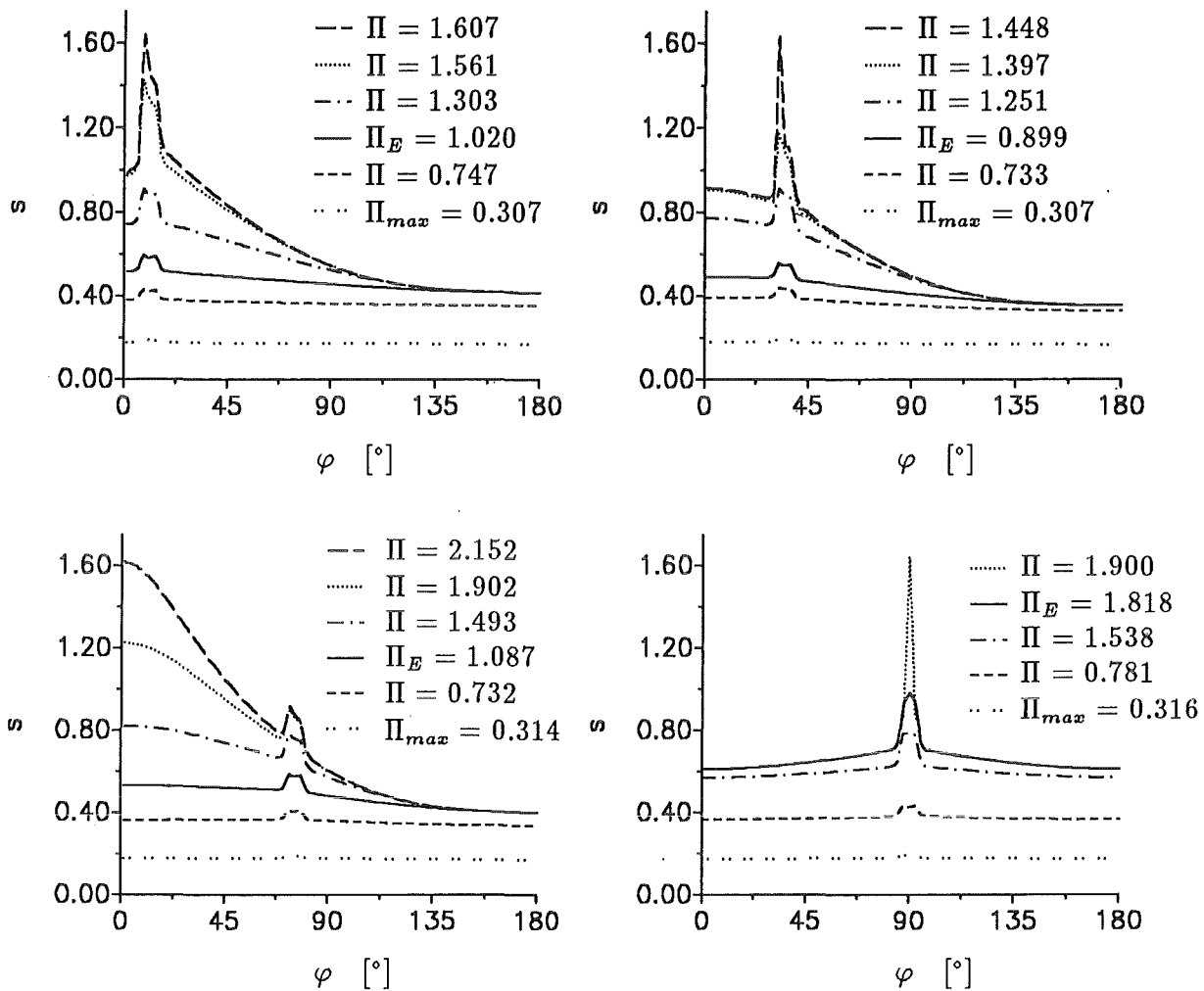


Abb. 7.11: Plastische Bogenlänge s entlang der Kugelinseite für $\varphi_0 = 10^\circ$, $\varphi_0 = 35^\circ$, $\varphi_0 = 75^\circ$ und $\varphi_0 = 90^\circ$ für verschiedene relative Innenvolumenänderungen $\Delta V/V_0 =: \Pi$; $\eta = 0.335$.

Die jeweils unterste Linie (\cdots) in Abbildung 7.11 zeigt die Verteilungen der plastischen Bogenlänge auf der Kugelinseite beim maximal ertragbaren Innendruck p_{max} , die durchgezogene Linie die Verteilung bei p_E . Aus den Bildern wird deutlich, daß die Verteilungen für $\varphi_0 < 90^\circ$ einen ähnlichen Verlauf wie beim Bifurkationsmodus 1 aufweisen, wobei zusätzlich am Ort der Imperfektion ein „peak“ erkennbar ist. Nach Erreichen von p_E verformen sich große Bereiche der Kugel weiterhin plastisch. Bei jenem Innendruck, ab dem die $p - \Delta V$ -Kurven steil abfallen, werden plastische Belastungen nur noch in unmittelbarer Umgebung der Imperfektion ermittelt, wie am Beispiel $\varphi_0 = 35^\circ$ gut zu erkennen ist. Die für $\varphi_0 = 75^\circ$ aufgetragene Verteilung der plastischen Vergleichsdehnung macht deutlich, daß diese Imperfektion die Kugel lediglich zu einer dem Bifurkationsmodus 1 ähnlichen Verformung anregt. Dieses Verhalten geht mit der Abnahme des kritischen Innendrucks p_E für $35^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$ (s. Abb. 7.10) einher.

Für die um den Äquator symmetrische Imperfektion wird analog zu den für $k = 2$ durchgeführten FE-Rechnungen (vgl. Abb. 7.6) erst bei deutlich höheren plastischen Vergleichsdehnungen der Beginn der Entlastung ermittelt. Nach Erreichen von p_E bzw. $\Delta V_E/V_0$ lokalisieren sich die plastischen Verformungen im Äquator der Kugel. Dabei wird die Kugel ausschließlich in unmittelbarer Umgebung der Imperfektion weiter plastisch belastet, wodurch der Steilabfall im $p - \Delta V$ -Diagramm hervorgerufen wird.

Ein anderes Verhalten zeigt sich bei einem Wert $\eta = 100$. Die für verschiedene φ_0 ermittelten $p - \Delta V$ -Kurven sind in Abbildung 7.12 dargestellt.

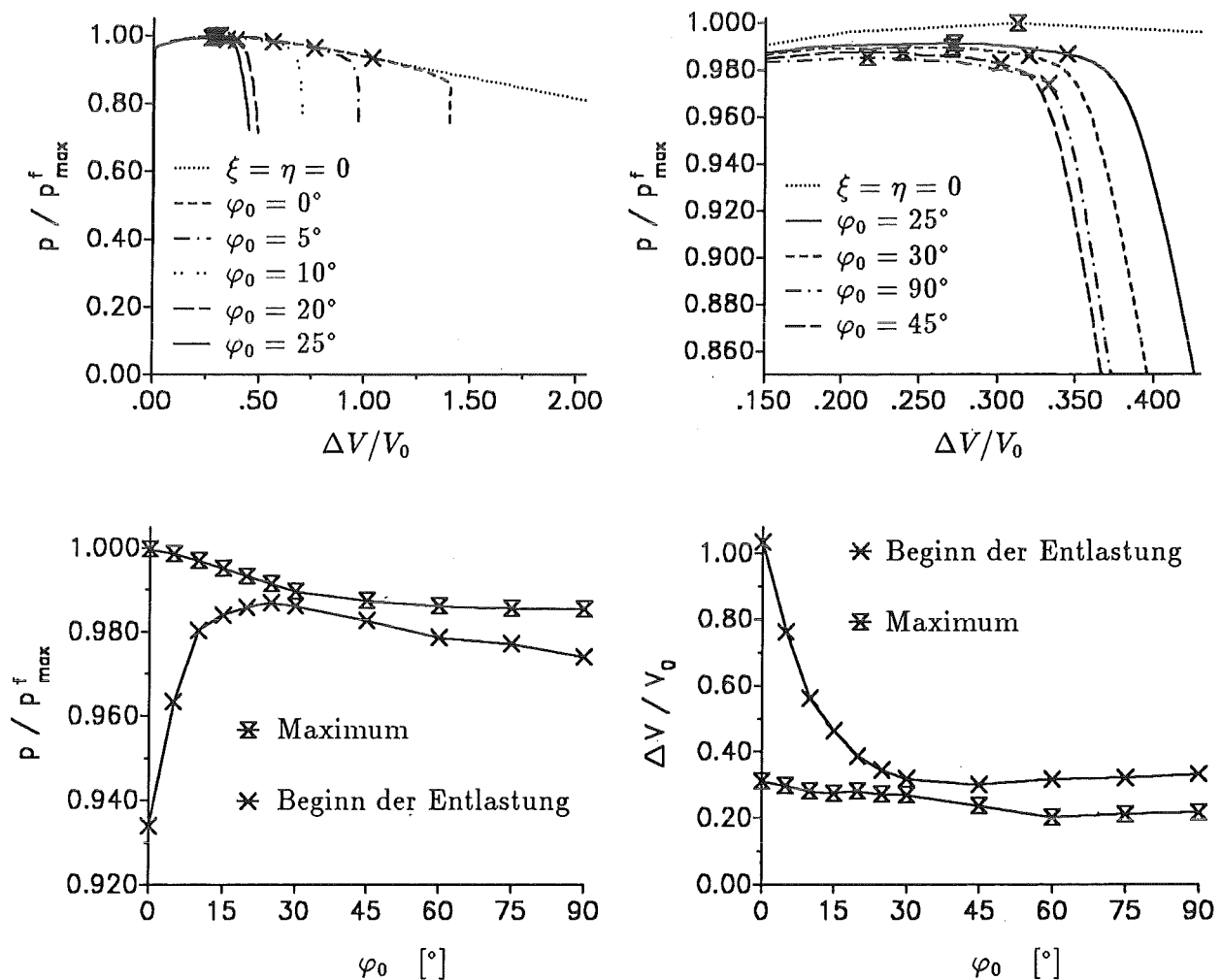


Abb. 7.12: Verformungsverhalten der Kugel (oben) und die kritischen Innendrucke und Innenvolumina (unten) für verschiedene φ_0 ; $\eta = 100$.

Zwar nimmt auch bei diesen Imperfektionen der maximal ertragbare Innendruck mit zunehmendem Winkel $0^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$ ab, p_E ist für die im Äquator eingebrachte Imperfektion jedoch deutlich höher als für jene im Pol; somit ist die Differenz $V_E - V_{\max}$ für $\eta = 100$ am Pol am

größten. Weiterhin läßt sich aus der $p - \Delta V$ -Kurve für $\varphi_0 = 0^\circ$ entnehmen, daß nach Erreichen von p_E , bei weiterer Zunahme des Innenvolumens, große Bereiche der Kugel kontinuierlich plastische Verformungen erfahren. Nachdem die Kugel ca. das 2.4-fache des Ausgangsvolumens ($\Delta V/V_0 \approx 1.4$) erreicht hat, fällt die $p - \Delta V$ -Kurve steil ab und die plastisch belastete Zone reduziert sich auf die unmittelbare Umgebung des Pols.

Für die bei $\varphi_0 = 25^\circ$ vorgegebene Imperfektion wird p_E maximal, für $\varphi_0 = 30^\circ$ wird auf der Abszisse des $p - \Delta V$ -Diagramms der geringste Abstand zwischen p_{max} und p_E festgestellt.

7.3 *Schlußfolgerungen*

Die FE-Rechnungen für die axialsymmetrische Kugel bestätigen die aus der Literatur bekannte Aussage, daß für die unterstellten Eigenformen (7.7) der niedrigste Bifurkationsmodus durch $k = 1$ gegeben ist. Nachdem im unteren Pol die Bedingung (7.6) näherungsweise erfüllt ist, werden Entlastungen auf der Außenseite des oberen Pol ermittelt; dies führt zu einer Abweichung von der fundamentalen Lösung. Bei weiterer Zunahme des Innenvolumens resultiert daraus jedoch keine Einschnürung im unteren Pol der Kugel, sondern es werden weiterhin große Bereiche der Struktur plastisch belastet. Für die um $\pi/2$ symmetrische Eigenform ($k = 2$) zeigt sich, daß die ermittelte Lösung erst bei einem relativ hohen Innenvolumen von der fundamentalen Lösung verzweigt, obwohl für diese Imperfektion der maximal ertragbare Innendruck niedriger als bei der Modus-1-Imperfektion (gleicher Amplitude) ist. Nach Beginn der Entlastung schnürt sich die Kugel im Bereich des Äquators ein.

Bei Variation der Lage der lokalen Imperfektionen nimmt der maximal ertragbare Innendruck p_{max} mit zunehmendem Winkel φ_0 für Winkel $\varphi_0 = [0, \pi/2]$ kontinuierlich ab. Diese Abhängigkeit des Maximaldrucks von der Lage der Imperfektion erscheint plausibel, da mit Zunahme von φ_0 der Durchmesser des mit der axialsymmetrischen Imperfektion beaufschlagten Bereichs größer wird.

Im nachkritischen Bereich, d.h. nach Erreichen der Stabilitätsgrenze, zeigen die axialsymmetrischen Imperfektionen für p_E diese Tendenz jedoch nicht. Mit zunehmendem Winkel φ_0 verringert sich zunächst bis $\varphi_0 \approx 0.2\pi$ die Differenz $V_E - V_{max}$. Für größere φ_0 nimmt die Differenz wieder zu, wobei je nach Amplitude der Imperfektion die Differenz $V_E - V_{max}$ am Äquator größer oder kleiner ist als am Pol der Kugel. An der Stelle $\varphi_0 = 75^\circ$ führt beispielweise die Imperfektion $\eta = 0.335$ zu einer typischen Modus-1-Verformung und für $\eta = 100$ zu einer

sofortigen Einschnürung der Kugel am Ort der Imperfektion.

Dieses Verhalten läßt den Schluß zu, daß das nachkritische Verformungsverhalten einer Kugel auf der Basis der Axialsymmetrie nicht korrekt wiedergegeben wird. Mit Hilfe der Eigenform 1 wird sicherlich die Verzweigungslast richtig approximiert, eine sich vom Pol aus entwickelnde Verformungslagerung entlang eines Großkreises, die letztendlich zu dem von MARIN ET AL. experimentell beobachteten Aufreißen der Kugel führen würde, kann aufgrund der unterstellten Axialsymmetrie nicht wiedergegeben werden.

Kapitel 8

Untersuchungen zum Reaktordruckbehälter (Teil 1)

8.1 Der Reaktordruckbehälter

Abbildung 8.1 zeigt einen Schnitt durch einen Druckwasserreaktor, für den die vorgestellten Untersuchungen durchgeführt wurden.

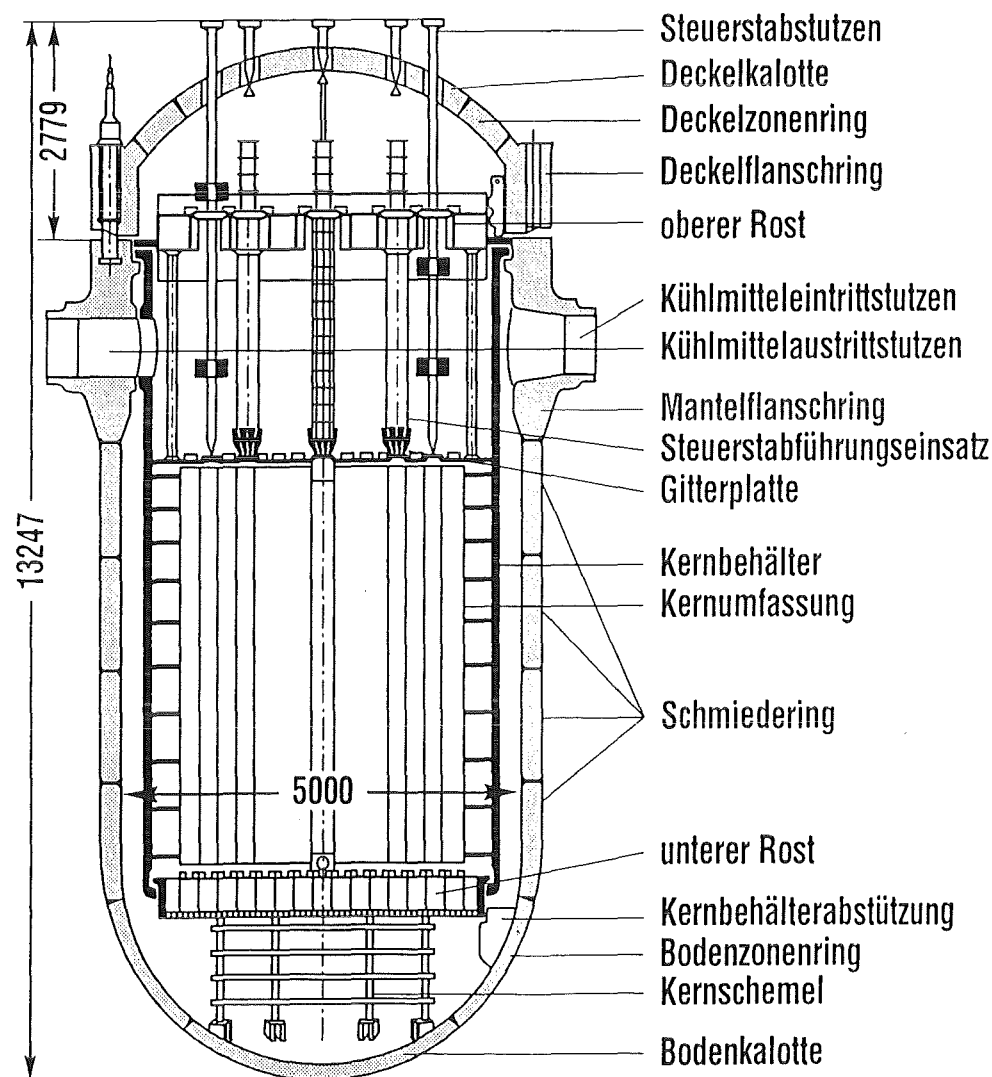


Abb. 8.1: Längsschnitt durch den Druckbehälter eines Druckwasserreaktors.

Der Behälter besteht aus dem ferritisch-bainitischen Stahl 20 MnMoNi 55. Es wurde lediglich der Abschnitt unterhalb des Mantelflaschringes in die FE-Rechnungen einbezogen. Dieser Abschnitt des Reaktordruckbehälters (RDB) besteht aus einem zylindrischen und einem kugelförmigen Bereich. Der zylindrische Bereich wird aus miteinander verschweißten Schmiederinnen gefertigt, der kugelförmige Bereich wird durch die geschmiedete Bodenkalotte und dem aus mehreren Segmenten zusammengeschweißten Bodenzonenring gebildet ([16, S. 118]). Nach dem Zusammenschweißen wird der Behälter im Bereich der Schweißnähte spannungsarmgeglüht [62, S. 46] und zum Schutz gegen Korrosion mit einer austenitischen Schweißplattierung versehen.

8.2 Axialsymmetrische Geometrie

8.2.1 Diskretisierung

Das den FE-Rechnungen zugrunde gelegte Netz zeigt Abbildung 8.2. Der Behälter wurde mit Hilfe von 264 8-knotigen axialsymmetrischen Elementen mit reduzierter Integrationsordnung diskretisiert. Der sphärische Bereich des RDBs weist bis $\varphi = 75^\circ$ dieselbe Diskretisierung wie die in vorigen Kapitel als Kugel 2 (s. 7.1) bezeichnete Hohlkugel auf. Der zylindrische Teil des Behälters besitzt einen Innendurchmesser von 5000 mm und eine Wandstärke von 256 mm. Am oberen Ende wurden die Knotenverschiebungen in axialer Richtung unterbunden, der Knoten auf der Innenseite des Behälters wurde zusätzlich in radialer Richtung festgehalten. Der Übergang von dem Zylinder ($w_0 = 256\text{mm}$) zu der 148mm dicken Kugelschale wird durch einen auf der Außenseite nach unten hin verjüngenden Ring gebildet. Der sphärische Bereich geht bei $\varphi = 77.57^\circ$ in den zylindrischen Teil über.

Neben dem Winkel φ wird die Bogenlänge b eingeführt, die, vom Pol beginnend, auf der Innenseite des Druckbehälters läuft. In allen Rechnungen blieben die Schweißnähte, die Kernbehälter- und Kernschemelabstützungen sowie die Schweißplattierung unberücksichtigt.

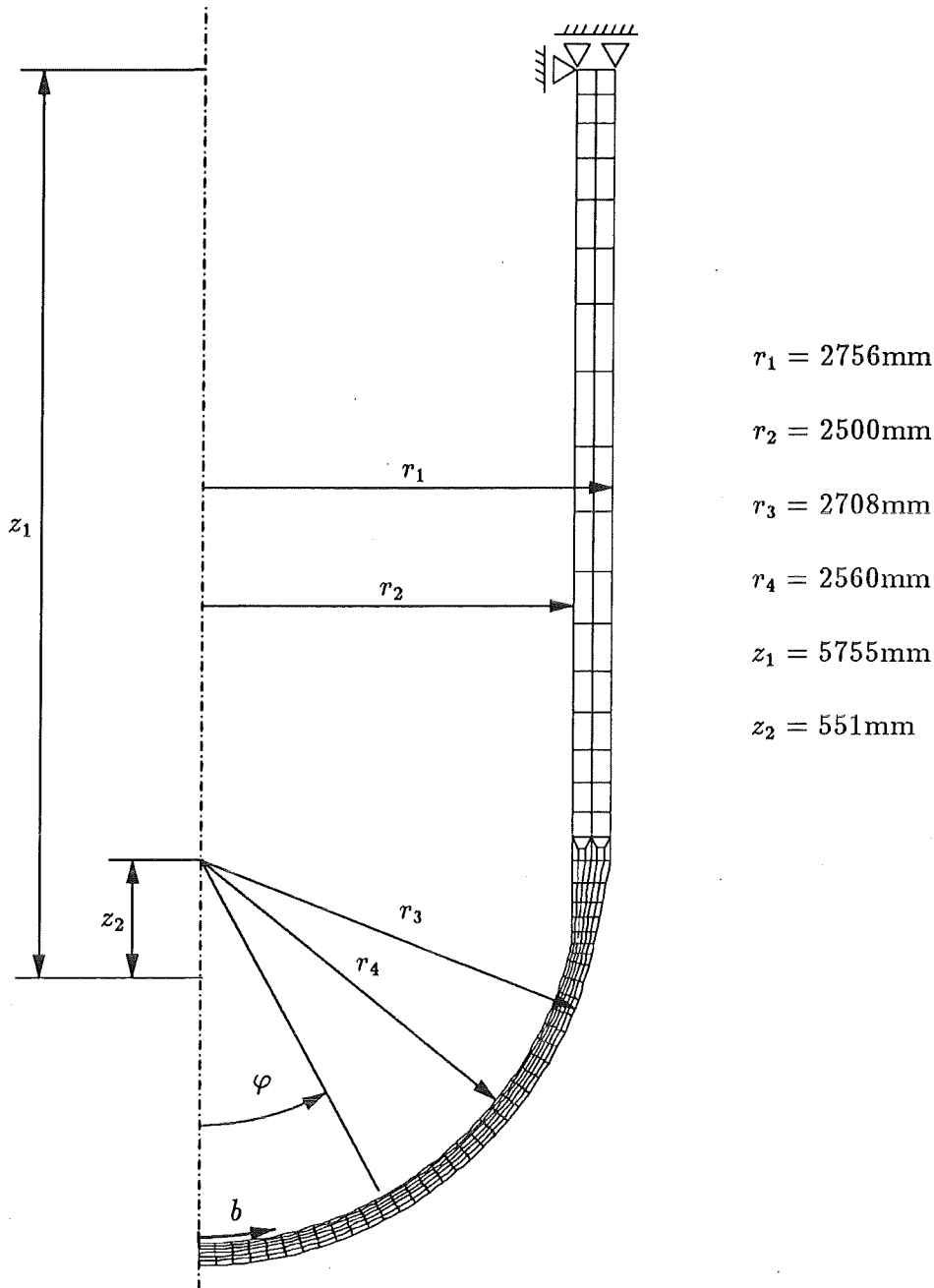


Abb. 8.2: Das den FE-Rechnungen zur Ermittlung der fundamentalen Lösung des RDBs zugrunde gelegte Finite-Elemente Netz und Randbedingungen.

8.2.2 Globale Imperfektionen

Für die hier untersuchte Behältergeometrie sind keine Bifurkationsanalysen bekannt. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt, in Analogie zu den vorigen Kapiteln, als globale Imperfektionen jene Imperfektionen bezeichnet, die sich mittels einer Kosinusfunktion beschreiben lassen. Aufgrund der vorgegebenen Geometrie und Randbedingungen ist der Pol des perfekten RDBs die höchstbeanspruchte Stelle. Während sich die fundamentale Lösung des Zugstabs

durch einen homogenen Spannungszustand und die der Kugel durch einen nur vom Radius abhängigen Spannungszustand auszeichnen, herrscht für den RDB bei Innendruckbelastung ein allgemeiner inhomogener Spannungszustand vor.

Der Zugstab wurde als anfänglich homogen betrachtet, die Kugel als anfänglich kugelsymmetrisch. Die fundamentalen Lösungen dieser Strukturen wiesen ebenfalls diese hochgradigen Symmetrien auf. Bei der verzweigten Lösungen gingen aber diese Symmetrien (außer der erzwungenen Axialsymmetrie) verloren. Der RDB weist nun von Anfang an außer der unterstellten Axialsymmetrie keine weitere Symmetrie auf. Daher wird vermutet, daß es sich bei dem hier diskutierten Problem um kein axialsymmetrisches Bifurkationsproblem handelt.

Um dies zu überprüfen, wurden die Koordinaten der zwischen $\varphi = 0$ und $\varphi = 75^\circ$ auf der Innenseite des RDBs liegenden Knoten gemäß

$$\hat{r}(\xi_g, \varphi) = r_{i,0} + \frac{\xi_g w_0}{2} \left\{ 1 + \cos \left(\pi \frac{\varphi}{75^\circ} \right) \right\} \quad \text{mit } \varphi = [0, 75]^\circ \quad (8.1)$$

berechnet, wobei ξ_g wie im vorigen Kapitel durch $\xi_g = |\Delta w_{max}|/w_0$ gegeben ist. Abbildung 8.3 verdeutlicht die Kontur der RDB-Wand. Ausgehend von der perfekten, sphärischen Bodenkalotte wird eine Kosinus-Halbwellen so überlagert, daß die Wand am Pol um $\xi_g w_0$ mm dünner als der perfekte RDB ist und bei $\varphi = 75^\circ$ die Sollwandstärke w_0 besitzt.

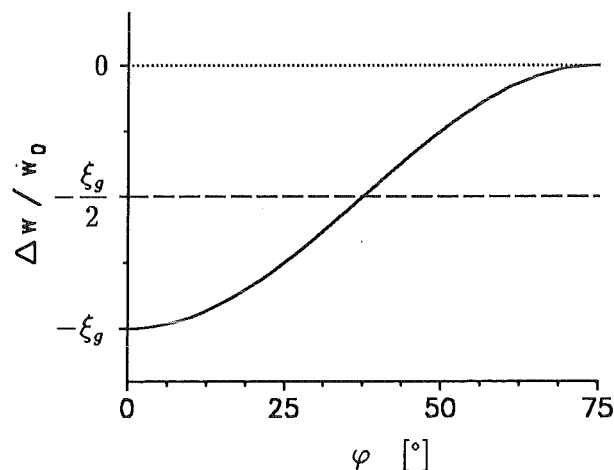


Abb. 8.3: Wanddickenänderung $\Delta w/w_0$ des sphärischen Bereichs des Behälters.

Die Abbildung 8.4 zeigt die aus den FE-Rechnungen ermittelten $p - \Delta V$ -Kurven für verschiedene ξ_g -Werte. Die Berechnungen wurden gemäß der in Kap. 6.3.1 erläuterten Vorgehensweise durchgeführt. Es wurden auch hier die Materialparameter $E/E_t = 0.005$, $E_t/\sigma_y = 2$ und $\nu = 0.3$ verwendet. Nach Erreichen des maximal ertragbaren Innendrucks p_{max} wird der Behälter bei

Zunahme des Innenvolumens weiterhin plastisch verformt, bis bei p_E am oberen Ende des Behälters Entlastungen ermittelt werden. Es zeigt sich, daß auch die fundamentale Lösung des Anfangs-Randwertproblems des RDBs elastische Entlastungen aufweist.

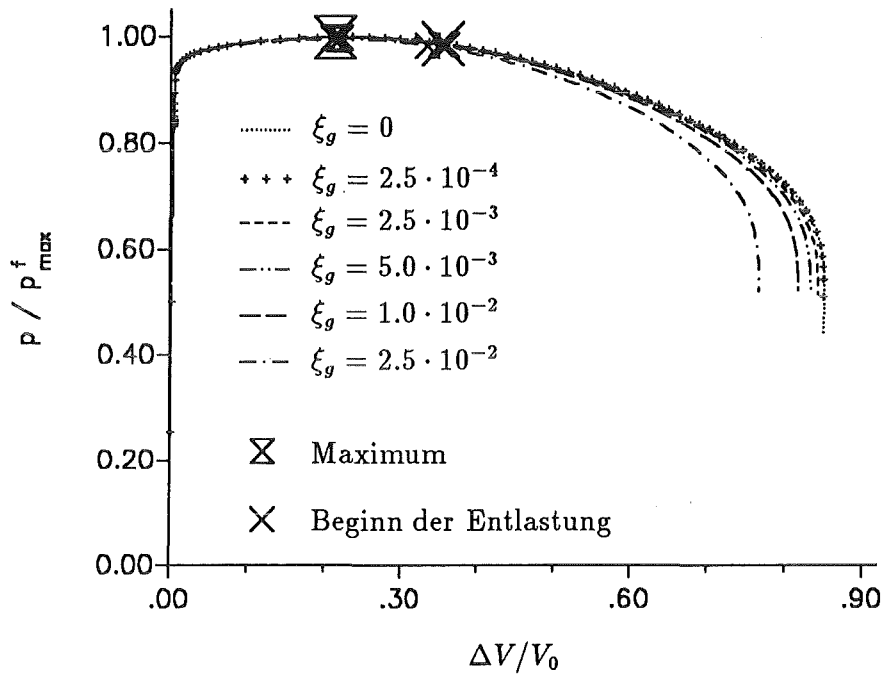


Abb. 8.4: Verformungsverhalten des Reaktordruckbehälters für verschiedene Wanddickenänderung $\xi_g w_0$. Das Maximum sowie der Beginn der Entlastung sind für den perfekten RDB durch größere Symbole gekennzeichnet.

Für den imperfekten RDB zeigt sich, daß sich mit abnehmender Imperfektionsgröße die Kurven die fundamentale Lösung annähern. Eine aus den beiden vorigen Kapiteln ermittelte Grenzkurve kann nicht festgestellt werden, wodurch die bereits geäußerte Vermutung, daß es sich hierbei um kein axialsymmetrisches Bifurkationsproblem handelt, bestätigt wird.

Beim perfekten RDB ergibt sich ein um ca. 3.2% höherer kritischer Innendruck als bei der perfekten Kugel. Dieser Sachverhalt geht aus Abbildung 8.5 hervor, in der neben der Vergleichsspannung σ und der plastischen Vergleichsdehnung im Pol des perfekten RDBs die aus dem vorigen Kapitel bekannte Verteilung der plastischen Vergleichsdehnung in der Kugel aufgetragen ist. Die FE-Rechnungen wurden für den Tangentenmodul $E_t = E_t(\bar{\theta}) = 7/8 E_t(\theta_1)$ (s. Gln. (7.10) - (7.12)), jedoch für $\nu = 0.499$ durchgeführt. Die Größe $\sigma_m(\bar{\theta})$ ist die aus der Instabilitätsbedingung (7.2) der inkompressiblen Kugel für $E_t = E_t(\bar{\theta})$ ermittelte Vergleichsspannung beim maximal ertragbaren Innendruck.

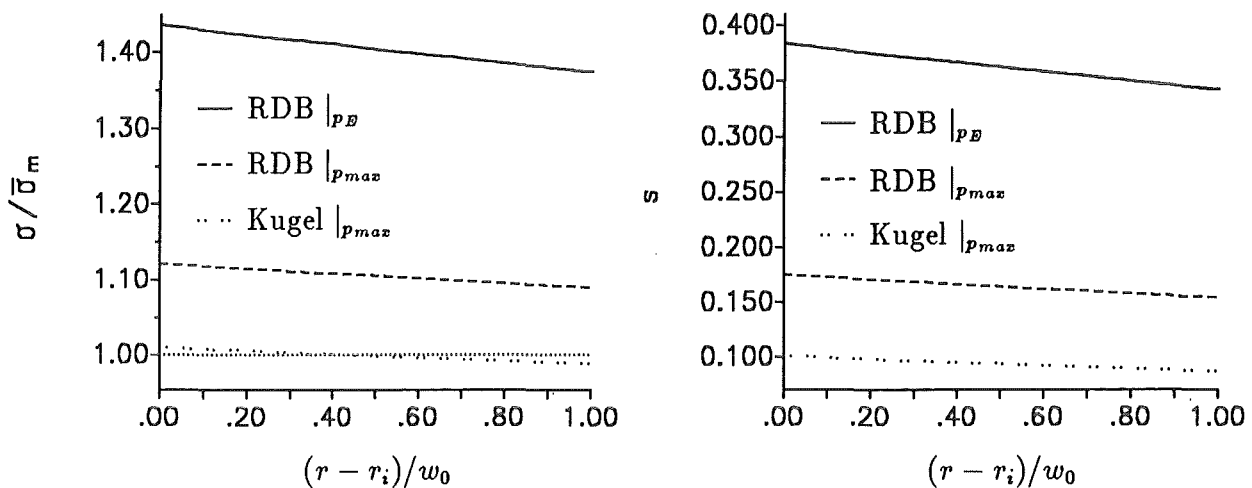


Abb. 8.5: Vergleich der Spannungsverläufe (links) und der Verteilung der plastischen Bogenlänge im Pol des RDBs bei p_{max} und p_E mit denen der perfekten Kugel bei p_E (s. Abb. 7.8) für ein homogenes Temperaturfeld $\bar{\theta}$ und $\nu = 0.499$.

Für den nahezu inkompressiblen RDB ergeben sich an der höchstbelasteten Stelle bei den kritischen Drücken p_{max} und p_E folgende Verhältnisse zwischen der über die Behälterwand gemittelten Vergleichsspannung $\bar{\sigma}_m$ bzw. $\bar{\sigma}_E$ und dem Tangentenmodul:

$$\frac{\bar{\sigma}_m}{E_t} = 0.7373 \quad , \quad (8.2)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_E}{E_t} = 0.9371 \quad . \quad (8.3)$$

8.2.3 Lokale thermische Imperfektionen

Im Rahmen dieser Arbeit werden ausschließlich lokale thermische Imperfektionen betrachtet, da kein prinzipiell anderes Verhalten des RDBs durch Vorgabe von lokalen geometrischen Imperfektionen zu erwarten ist, was bereits in [39] bestätigt wurde.

Wie im vorigen Kapitel wurden die Temperaturimperfektionen durch Vorgabe der Temperatur θ_2 im Bereich $\varphi_0 \pm 3.75^\circ$ erzeugt (s. Abb. 7.9). Mit den sich nach hinreichend langer Zeit einstellenden Temperaturverteilungen wurden im Spannungslauf Tragfähigkeitsanalysen durchgeführt. Die für $\eta = 0.355$ (s. (6.39)) für die verschiedenen Temperaturfelder ermittelten $p - \Delta V$ -Diagramme sind in Abbildung 8.6 dargestellt.

Es zeigt sich, daß die für $\varphi_0 = 0^\circ$ bis $\varphi_0 = 40^\circ$ ermittelten Kurven unterhalb der Kurve des perfekten RDBs liegen. Die für $\varphi_0 = 50^\circ$ bis $\varphi_0 = 70^\circ$ ermittelten Kurven liegen zunächst auch unterhalb der Kurve des perfekten RDBs, schneiden diese jedoch bei $\Delta V/V_0 \approx 0.7$. Der Grund

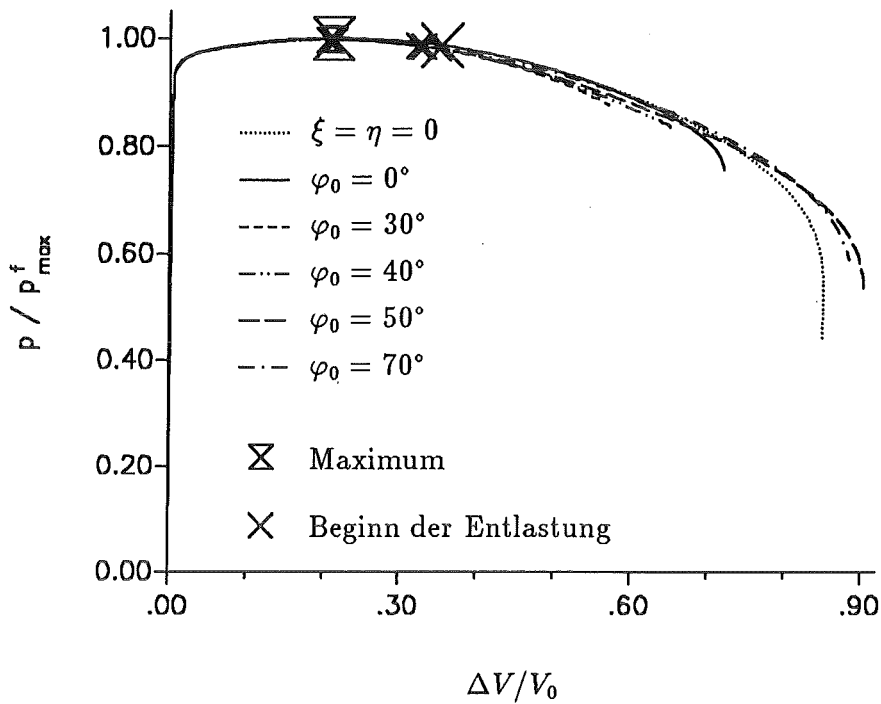


Abb. 8.6: Verformungsverhalten des Reaktordruckbehälters für verschiedene Lagen der Wärmeeinflußzone φ_0 ; $\eta = 0.335$.

hierfür ist, daß der RDB bei dem hier unterstellten Materialverhalten ($\eta = 0.335$) für $\varphi_0 \geq 50^\circ$ ein prinzipiell anderes Verformungsverhalten aufweist als für die Imperfektionen $\varphi_0 \leq 40^\circ$, wie Abbildung 8.8 verdeutlicht.

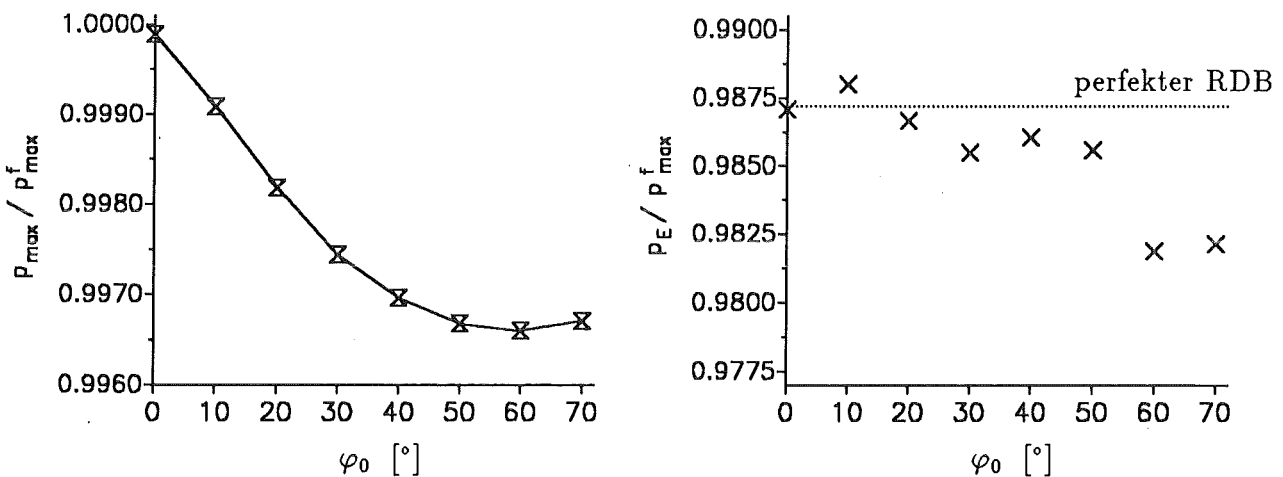


Abb. 8.7: Kritische Innendrucke p_{max} , p_E in Abhängigkeit von der Lagen der Wärmeeinflußzone φ_0 ; $\eta = 0.335$.

Bei den dem Pol näheren Imperfektionen ($\varphi_0 \leq 40^\circ$) werden bei p_{max} und p_E die Maximalwerte der plastischen Bogenlänge am Ort der Störungen ermittelt, die bei weiterer Zunahme

des Innenvolumens zur Einschnürung an diesen Stellen führen. Für die Imperfektionen $\varphi_0 \geq 50^\circ$ befinden sich die Maxima der plastischen Vergleichsdehnung im Pol des Behälters, wobei weite Bereiche des sphärischen Bereichs plastisch belastet werden. Es wird ein ähnliches Verformungsverhalten wie für die fundamentale Lösung ermittelt.

Es ergibt sich ein ähnliches Verformungsverhalten wie bei der Kugel, bei der für $\eta = 0.335$ und hinreichend große φ_0 eine dem Modus 1 ähnliche Verformung angeregt wurde (vgl. Abb. 7.11). Es zeigt sich jedoch ein anderes Verhalten für die Drücke p_E . Mit zunehmendem Winkel φ_0 nimmt beim RDB auch p_E tendenziell leicht ab¹, während bei der Kugel für $0^\circ \leq \varphi_0 \leq 90^\circ$ p_E zunächst zu- und danach wieder abnimmt (vgl. Abb. 7.10).

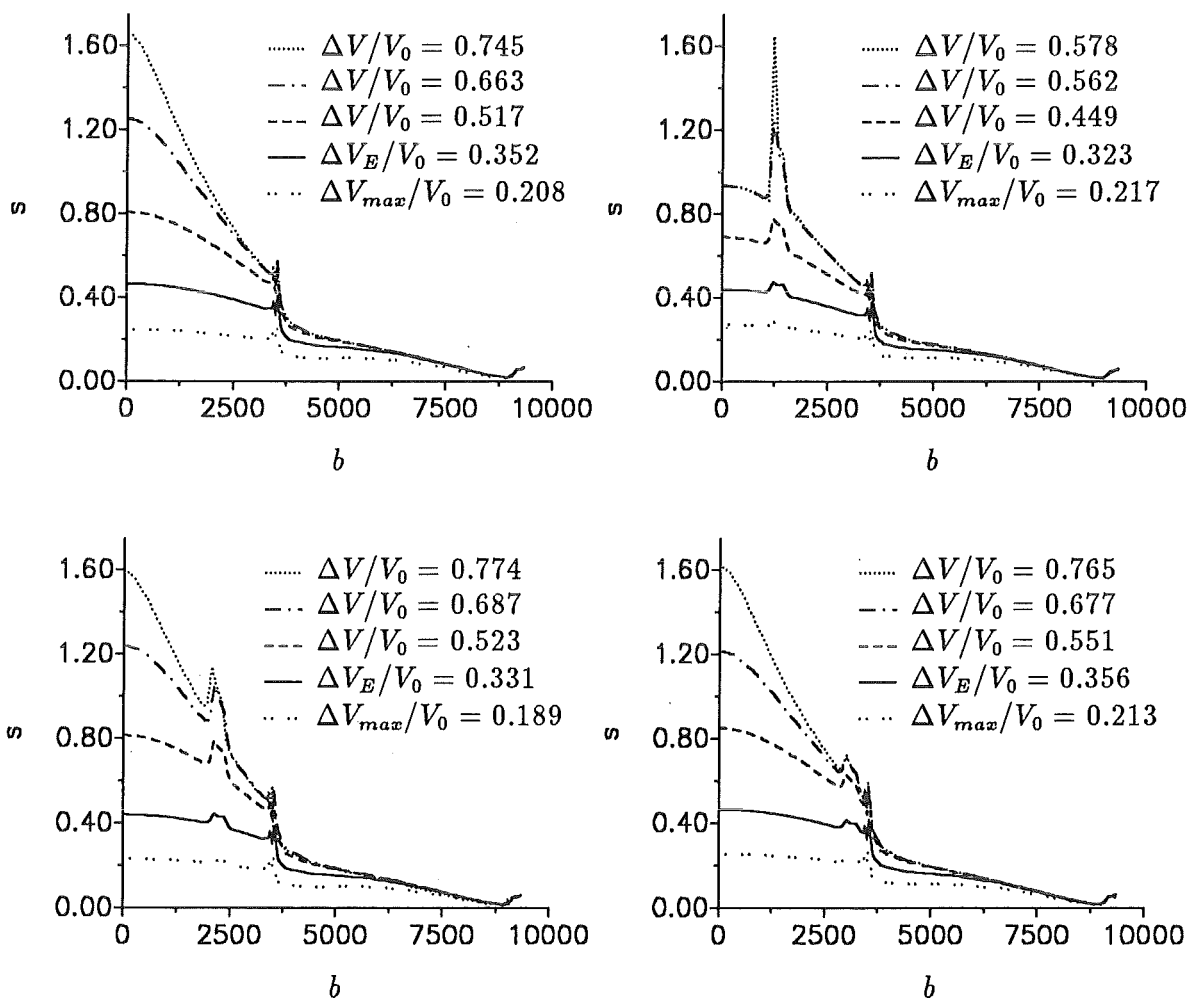


Abb. 8.8: Plastische Vergleichsdehnung s über der Bogenlänge b für die fundamentale Lösung (oben links) sowie für $\varphi_0 = 30^\circ$, $\varphi_0 = 50^\circ$, $\varphi_0 = 70^\circ$ mit $\eta = 0.335$.

¹Da an der oberen Einspannung des Behälters die ersten Entlastungen ermittelt werden, könnte die „Streuung“ von p_E durch die relativ grobe Diskretisierung dieses Bereichs hervorgerufen worden sein.

Eine mögliche Interpretation für das in Abb. 8.8 gezeigte Verhalten ist, daß es sich hierbei um konkurrierende Prozesse handelt. Aufgrund des durch die Geometrie hervorgerufenen allgemeinen inhomogenen Spannungszustands, der bei der ungestörten Geometrie zu einer Maximalbelastung im Pol führt, nimmt die Imperfektionssensitivität des Behälters mit zunehmendem Winkel ab. Somit müßte für die weiter vom Pol entfernten Imperfektionen ein höheres Spannungsniveau „erzeugt“ werden, um die Verformungslokalisierung weg vom Pol an den Ort der Störung zu verlagern. Dagegen spricht jedoch die Tatsache, daß p_{max} für zunehmendes φ_0 abnimmt und somit auch das nachkritische Verhalten stark beeinflußt werden sollte. Es wird daher vermutet, daß für den RDB die Lage der Imperfektion sicherlich einen Einfluß auf den Versagensursprung hat, das nachkritische Verformungsverhalten auf der Basis der Axialsymmetrie jedoch nicht realistisch wiedergegeben wird.

In einer weiteren Serie von Rechnungen wurden Tragfähigkeitsanalysen für $\eta = 100$ durchgeführt. Die dabei ermittelten kritischen Innendrucke p_{max} und p_E sind der Abbildung 8.8 zu entnehmen.

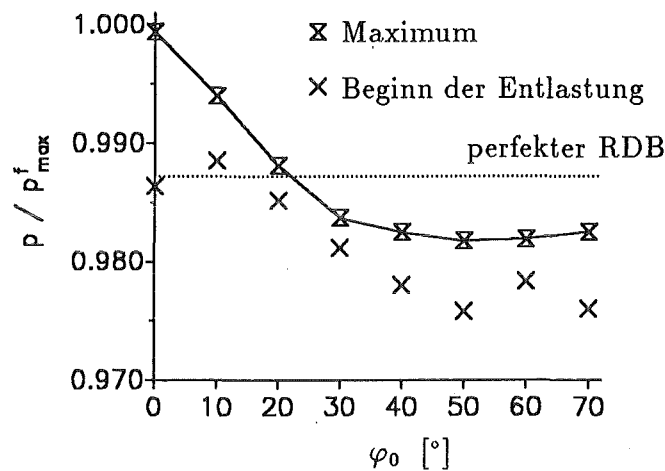


Abb. 8.9: Kritische Innendrucke p_{max} , p_E in Abhängigkeit von der Lage der Wärmeinflußzone φ_0 ; $\eta = 100$.

Für diese Imperfektionen wurde für alle φ_0 nach Erreichen von p_E eine Verformungslokalisierung am Ort der Imperfektion ermittelt, der durch den Steilabfall in den $p - \Delta V$ -Kurven erkennbar war. Auf eine Auftragung dieser Kurven wird verzichtet, da prinzipiell keine neuen Erkenntnisse gewonnen wurden und im nächsten Kapitel ähnliche Untersuchungen auf der Basis der für den Reaktorbaustahl ermittelten Materialparametern zu sehen sind.

8.3 Dreidimensionale Geometrie

Der Vergleich mit den an der axialsymmetrischen RDB-Geometrie gewonnenen Erkenntnissen mit den Ergebnissen der axialsymmetrischen Kugel lassen auch hier den Schluß zu, daß auf der Grundlage einer Axialsymmetrie das nachkritische Verformungsverhalten eines imperfekten Reaktordruckbehälters nicht richtig erfaßt werden kann.

In den folgenden Untersuchungen wird anhand einer außerhalb des Pols eingebrachten punktförmigen Imperfektion versucht, Hinweise auf ein mögliches nachkritisches Verformungsverhalten zu erhalten. Dazu wird mit einer punktförmigen thermischen Imperfektion, eines sogenannten „hot spots“, durch Variation von η das Verformungsverhalten des Behälters ermittelt.

8.3.1 Diskretisierung

Das den 3-D Rechnungen zugrunde gelegte FE-Netz zeigt Abbildung 8.10. Der Behälter besteht aus 264 20-knotigen Elementen. Es wurde eine Symmetrie bezüglich der axialen Schnittebene unterstellt. Am oberen Ende wurde für alle Knoten der translatorische Freiheitsgrad in axialer Richtung unterbunden. Zusätzlich wurden noch die am oberen Ende auf der Innenseite des Behälters liegenden Knoten in radialer Richtung festgehalten (s. auch [39]).

8.3.2 Punktförmige thermische Imperfektionen

Im Rahmen der in diesem Abschnitt vorgestellten Untersuchungen wird das Verhalten jenes Behälters diskutiert, dessen innerhalb des Bereichs A liegenden Knoten mit der Temperatur θ_2 beaufschlagt wurden. Die Knoten auf der Außenseite wurden auf der Anfangstemperatur θ_1 gehalten. Das sich nach hinreichend langer Zeit einstellende Temperaturfeld wurde den daran anschließenden Spannungsanalysen vorgegeben (s. Kap. 6.3.1). Die FE-Rechnungen beruhen auf temperaturunabhängigen Materialparametern E, σ_y, ν und den Tangentenmoduln $E_t(\theta_1)$ (7.10) und $E_t(\theta_2)$, deren Verhältnis durch η gemäß Gleichung (6.39) und (6.23) gegeben ist.

Die für verschiedene η -Werte ermittelten kritischen Innendrucke sind in Abbildung 8.11 dargestellt. Die Größe p_{max}^f ist der maximal ertragbare Innendruck des perfekten dreidimensionalen RDBs.

Für hinreichend große η -Werte (in diesem Fall $\eta \geq 0.335$) werden die maximalen Verformungen am Ort der Störung ermittelt. Für $\eta \leq 0.2$ ist der Pol des Reaktordruckbehälters der maximal

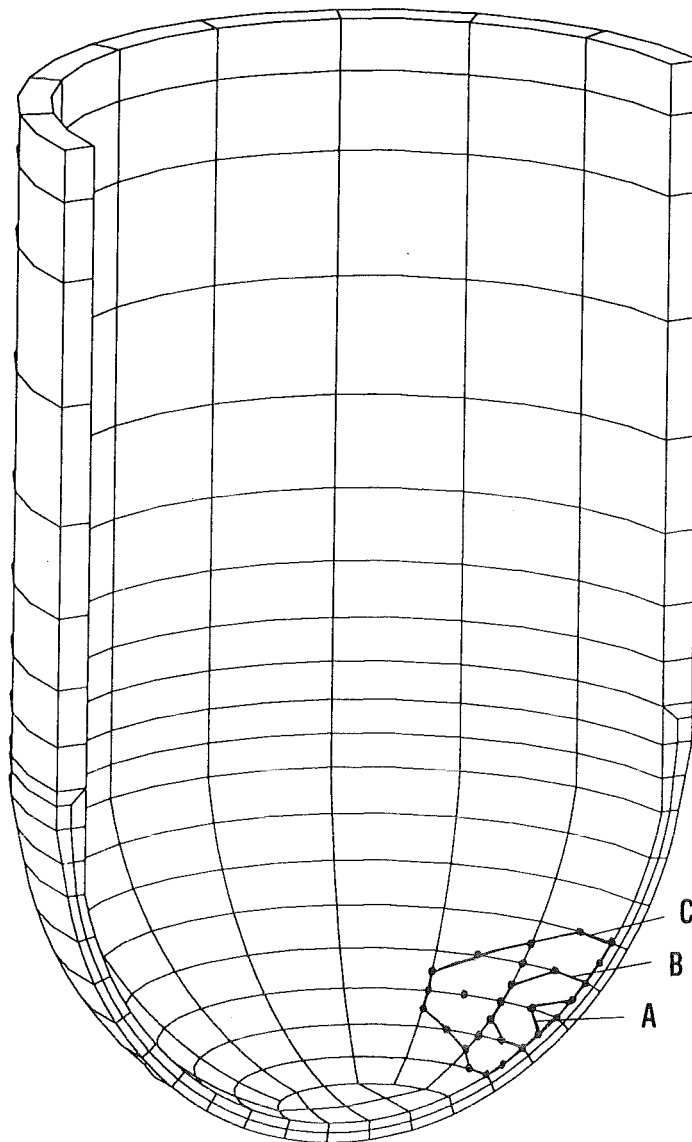


Abb. 8.10: Das den 3-D Rechnungen zugrunde gelegte FE-Netz einschließlich der mit θ_2 beaufschlagten Bereiche.

beanspruchte Punkt. Diese Tatsache geht auch aus Abb. 8.11 hervor. Es ist gut erkennbar, daß mit zunehmender Imperfektionsgröße p_{max} und p_E zunächst kontinuierlich abnehmen, ab einer kritischen Imperfektionsgröße auf ein höheres Niveau springen und von dort aus wieder kontinuierlich abnehmen. Für jene Imperfektionen, die zu einer Verformungslokalisierung im Pol führen, entlastet der Behälter ab p_E axialsymmetrisch, während für die größeren Imperfektionen der Behälter an der dem hot spot gegenüberliegenden Seite vom oberen Ende her entlastet. Es zeigt sich, daß hinreichend große außerhalb des Pols eingebrachte Imperfektionen zu einer nichtaxialsymmetrischen Verformung des Behälters führen, was die im vorigen Abschnitt geäußerten Vermutungen zu bestätigen scheint.

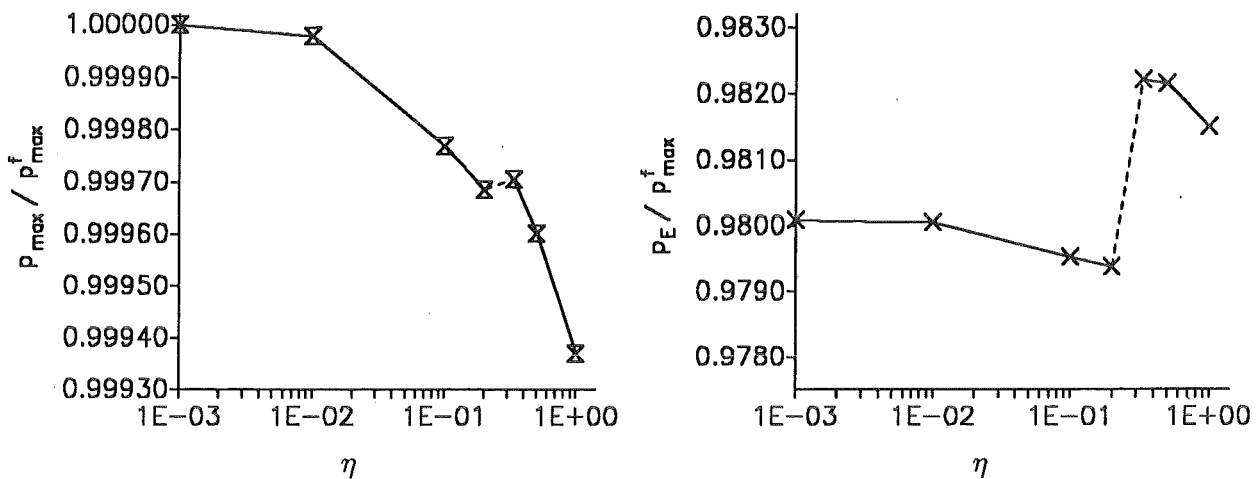


Abb. 8.11: Kritische Innendrucke p_{max} , p_E für die Wärmeeinflußzone A in Abhängigkeit von η .

Der Sprung von p_E und das damit verbundene prinzipiell verschiedenartige Verformungsverhalten des Behälters erinnert an das in den Kapiteln 6 und 7 gezeigte Bauteilverhalten bei Verzweigung. Es handelt sich hierbei jedoch nicht um ein echtes Verzweigungsproblem, wie dies bei zylindrischen Behältern unter Innendruck der Fall ist (und auch experimentell beobachtet wird)²: Aufgrund des von Natur aus höheren Spannungsniveaus im Pol, kann ein prinzipiell unterschiedliches Verformungsverhalten nur mit einer endlichen, nicht aber mit einer gegen Null strebenden Amplitude erzeugt werden. Es ist somit bei dieser Geometrie in Verbindung mit dieser Art von Imperfektionen eine (ortabhängige) Mindestamplitude der Störung notwendig. Lediglich im Pol ist mit einem Verzweigungsproblem relativ zur Umfangsrichtung zu rechnen.

²Siehe hierzu die Arbeiten von CHU [12], CROSSLAND AL. [14], FAUPEL [15], JORGENSEN [36], LARSSON ET AL. [41], ROACH / PRIDY [57], ROYER ET AL. [58], TRIANTAFYLIDIS / KWON [70].

Kapitel 9

Reaktordruckbehälter (Teil 2)

9.1 Einführung in das Kapitel

Im vorigen Kapitel wurde der prinzipielle Einfluß von Imperfektionen auf das Verformungsverhalten des RDBs auf der Basis fiktiver Materialparameter untersucht. Die in diesem Kapitel vorgestellten Tragfähigkeitsanalysen beruhen auf den für den Reaktorbaustahl mit Hilfe einachsiger Zugversuche identifizierten Werkstoffparametern. Es war von Interesse, wie sich unterschiedliche Temperaturverteilungen auf den maximal ertragbaren Innendruck und auf das nachkritische Verformungsverhalten des RDBs auswirken. Um die Einflüsse der die Wärmeinflußzone charakterisierenden Größen eindeutig bestimmen zu können, wurden neben den thermoelastischen Effekten (Wärmeausdehnung, Thermospannungen) auch das Eigengewicht des RDBs und der die Temperaturerhöhung hervorrufenden Kernschmelze vernachlässigt¹.

9.2 Bestimmung der Materialparameter

Die den FE-Rechnungen zugrunde gelegten Materialparameter zur Beschreibung der isotropen Verfestigung wurden mit Hilfe einachsiger Zugversuche identifiziert. Diese Versuche wurden von KUHN [38] an langen Proportionalstäben ($l_0/2r_0 = 10$) aus dem Reaktorbaustahl 20 MnMoNi 55 in einem Temperaturbereich von 23 °C und 900 °C durchgeführt. Die Dehnrates betrug in allen Versuchen $\dot{\epsilon} = 1.67 \cdot 10^{-4} s^{-1}$. Der vorliegenden Arbeit wurden die experimentell ermittelten Zugkurven sowie die in Tabelle 9.1 angegebenen Werkstoffkenngrößen zugrunde gelegt. Diese Werkstoffkenngrößen entsprechen bis auf die für $\theta = 90^\circ$ angegebene Gleichmaßdehnung A_g den experimentellen Befunden. Die in der Tabelle für $\theta = 90^\circ$ angegebene Gleichmaßdehnung wurde angenommen, da sie aus der Zugkurve nicht eindeutig bestimmt werden konnte (s. [38]).

¹Testrechnungen (s. auch [56]) ergaben, daß diese Vereinfachungen den kritischen Innendruck nicht wesentlich beeinflussen. Dies gilt allerdings nur im Zusammenhang mit den hier durchgeführten Untersuchungen; eine Verallgemeinerung dieser Aussage ist nicht möglich.

Tab. 9.1: Werkstoffkenngrößen des Stahls 20 MnMoNi 55; $\dot{\epsilon} = 1.67 \cdot 10^{-4} s^{-1}$ (aus [38]).

Temperatur [°C]	R_m [MPa]	$R_{p0.2}$ [MPa]	E-Modul [MPa]	A [%]	A_g [%]	Z [%]
23	620	460	194000	13.9	9.2	46.2
200	570	400	205000	9.2	6.8	34.6
300	590	420	175000	9.4	7.2	30.5
400	545	370	165000	14.2	8.0	39.9
500	420	355	150000	11.1	2.6	55.5
600	305	290	136000	12.5	1.0	75.0
700	150	147	130000	34.5	1.0	55.5
800	81	61	60000	31.9	17.0	24.9
900	57	45	16500	30.5	(22.6)	26.3

R_m : Zugfestigkeit

$R_{p0.2}$: 0.2% Dehngrenze

A : Bruchdehnung

A_g : Gleichmaßdehnung

Z : Brucheinschnürung

Wie bereits erläutert (s. Kap. 6.3.1), wird in ABAQUS das Verfestigungsverhalten durch Eingabe diskreter Punkte (k, s) definiert, wodurch eine multilineare Verfestigung beschrieben wird. Dazu wurde in das Nennspannungs-Totaldehnungs-Diagramm ein Polygonzug konstruiert. Dieser Polygonzug wurde so wählt, das die Fließgrenze und die Instabilitätsbedingung (6.17) exakt wiedergegeben wurden. Aus den Stützstellen des Polygonzugs (σ_n, e) wurden gemäß (6.10) und (6.12) σ und ϵ ermittelt. Subtraktion des elastischen Anteils ϵ_e liefert das gesuchte Wertepaar (k, s) .

Aufgrund der nach Erreichen der Zugfestigkeit einsetzenden Einschnürung der Zugprobe können die Wertepaare, die das nachkritische Verhalten beschreiben, nicht mehr aus den Zugkurven ermittelt werden. Zur Bestimmung dieser Wertepaare wurden Finite-Elemente-Simulationen durch Vorgabe eines imperfekten Zugstabs durchgeführt (s. auch [39]). Die das nachkritische Verhalten beschreibenden Wertepaare wurden durch eine „trial and error“-Prozedur solange variiert, bis die Zugkurve möglichst gut wiedergegeben wurde. Die Wahl der Wertepaare wurde dadurch eingeschränkt, daß instabiles Materialverhalten („softening“) ausgeschlossen wurde.

Dies bedeutet, daß die Tangentenmoduln größer oder im Grenzfall gleich Null sind. Die so ermittelten Materialparameter sind im Anhang B, Tabelle A.3 gegeben.

Die Abbildungen 9.1 bis 9.4 zeigen den Vergleich zwischen den berechneten Nennspannungs-Totaldehnungs-Diagrammen und den aus den Experimenten ermittelten Zugkurven. Die Rechnungen wurden unter Ausnutzung der Axialsymmetrie und der Symmetrie um die $(r, \varphi, 0)$ -Ebene durchgeführt (vgl. Kap. 6.3.2). Der Stab besteht aus 40 8-knotigen axialsymmetrischen Elementen mit reduzierter Integrationsordnung. Um eine Einschnürung des Zugstabs zu erhalten, wurde die Kontur des Stabs gemäß (6.27) mit $\xi_g = 10^{-4}$ und $k = 2$ (Stab 2) berechnet. Die Rechnungen wurden mit den in Tabelle A.2 gegebenen temperaturabhängigen E-Moduln und Querkontraktionszahlen durchgeführt. Abbildung 9.5 zeigt den Zugstab in der Ausgangs- und in der Momentankonfiguration bei $e = 16.49\%$ und $\theta = 23^\circ$.

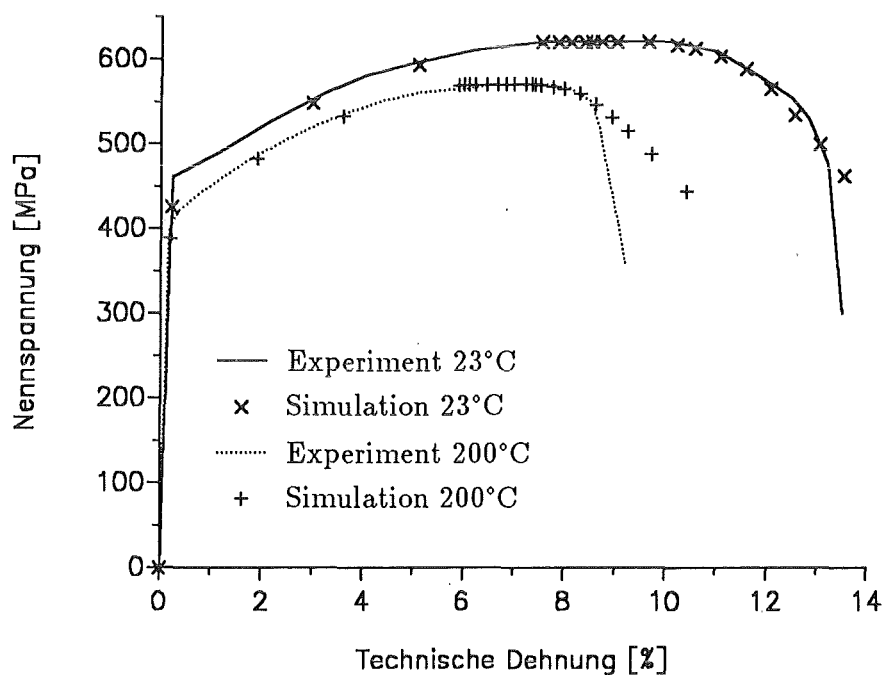


Abb. 9.1: Vergleich Experiment : Simulation für $\theta = 23^\circ\text{C}$ und $\theta = 200^\circ\text{C}$.

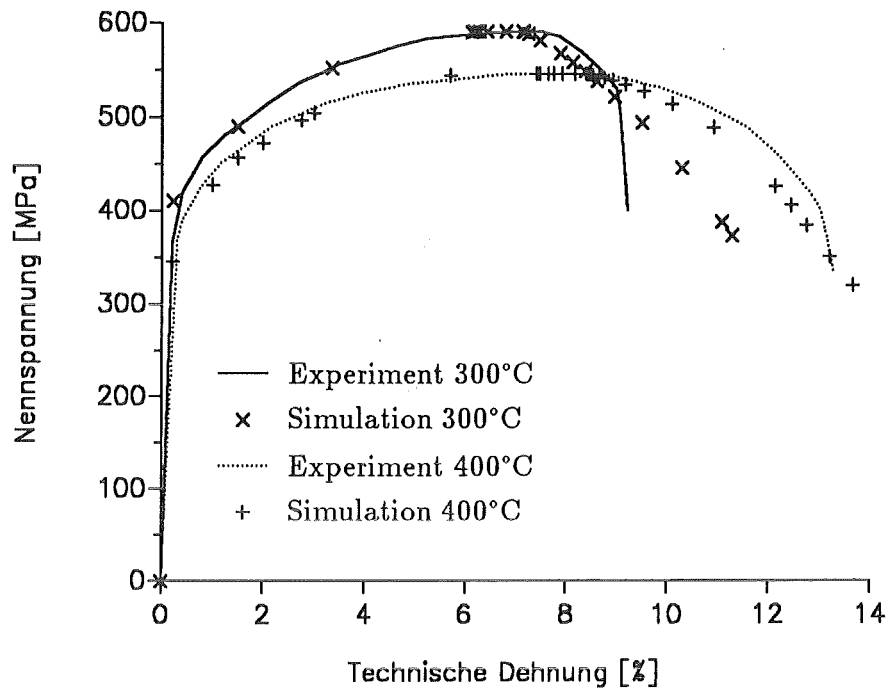


Abb. 9.2: Vergleich Experiment : Simulation für $\theta = 300^{\circ}\text{C}$ und $\theta = 400^{\circ}\text{C}$.

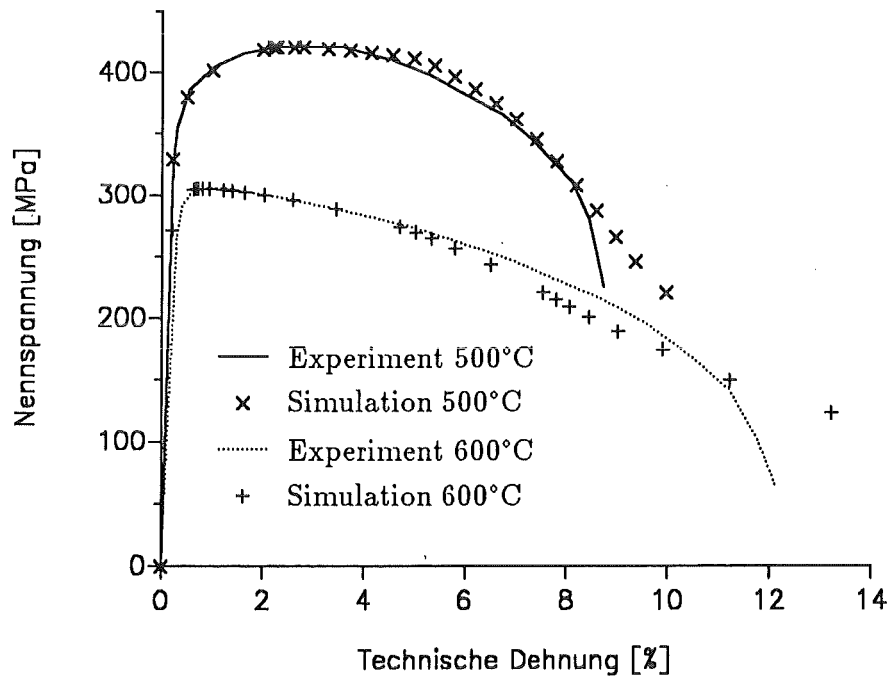


Abb. 9.3: Vergleich Experiment : Simulation für $\theta = 500^{\circ}\text{C}$ und $\theta = 600^{\circ}\text{C}$.

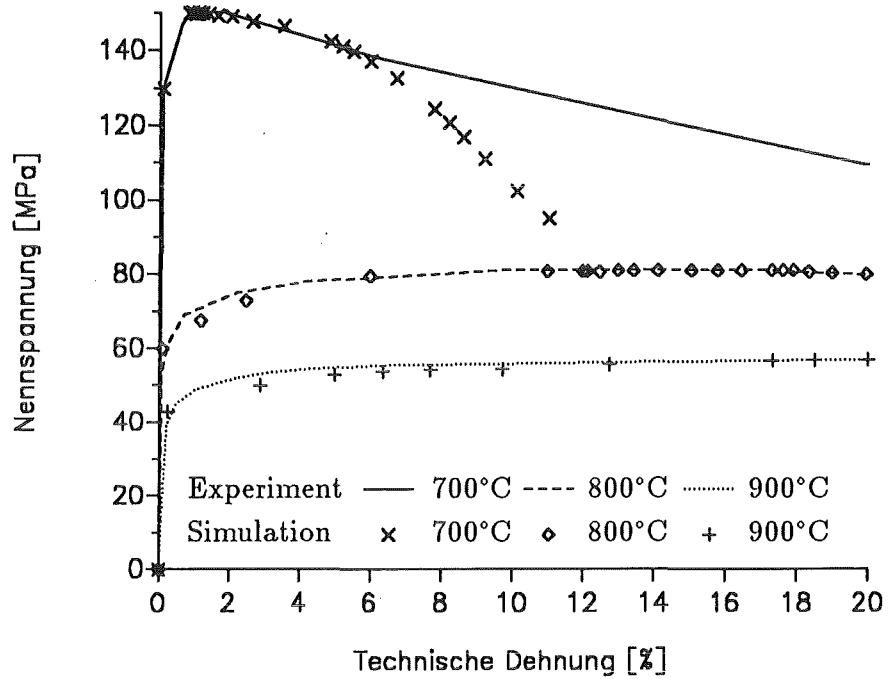


Abb. 9.4: Vergleich Experiment : Simulation für $\theta = 700^\circ\text{C}$, $\theta = 800^\circ\text{C}$ und $\theta = 900^\circ\text{C}$.

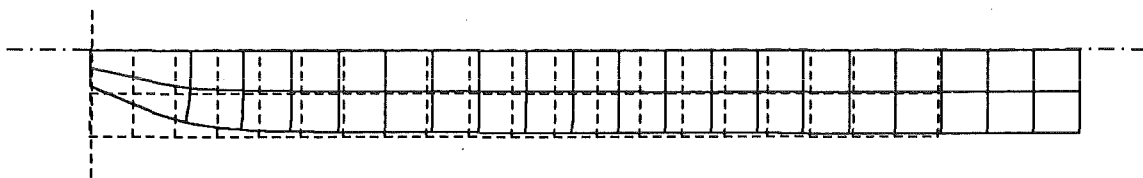


Abb. 9.5: Der Zugstab in der Ausgangskonfiguration und in der Momentankonfiguration bei $e = 16.49\%$, $\theta = 23^\circ\text{C}$; $\xi_g = 10^{-4}$.

Im Temperaturbereich zwischen 23 °C und 600 °C zeigt sich eine recht gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung. Der Bruch der Zugprobe, die in der Zugkurve durch den Steilabfall gekennzeichnet ist, kann nicht wiedergegeben werden². Die Abweichung im nachkritischen Bereich bei 700 °C sind aufgrund von Kriecheinflüssen erklärbar, die mit dem verwendeten Plastizitätsmodell nicht erfaßt werden können. Die hohen Gleichmaßdehnungen für 800 °C und 900 °C deuten ebenfalls auf starke Kriechverformungen hin.

9.3 Einfluß thermischer Imperfektionen

9.3.1 Axialsymmetrische Geometrie

In diesem Kapitel wird der Einfluß von axialsymmetrischen Temperaturverteilungen auf den maximal ertragbaren Innendruck und auf das nachkritische Verformungsverhalten des RDBs, unter Verwendung der für den Reaktorbaustahl ermittelten Werkstoffparameter, aufgezeigt. Ausgehend von dem im vorigen Kapitel in Abbildung 8.2 dargestellten FE-Netz wurden für verschiedene Innenwandtemperaturen θ_i und Winkel φ_0 instationäre Wärmeausbreitungsrechnungen und anschließend für die nach unterschiedlichen Zeiten ermittelten Temperaturfelder Tragfähigkeitsanalysen durchgeführt. Neben θ_i und φ_0 ist die Zeit t somit ein weiterer Parameter.

Ausgehend von einem homogenen Temperaturfeld $\theta_0=400$ °C wurden die in einem Bereich von 3.75° ober- und unterhalb von φ_0 auf der Innenseite des Reaktordruckbehälters liegenden Knoten mit der Temperatur θ_i beaufschlagt (s. auch Abb. 7.9). Die Außenseite des Behälters wurde als adiabatisch angenommen. Mit der aus der Literatur [1] entnommenen und im Anhang B in Tabelle A.1 gegebenen temperaturabhängigen Werten für die Wärmeleitfähigkeit k , die spezifische Wärme c und die Dichte ρ wurden instationäre Wärmeausbreitungsrechnungen durchgeführt. Da in ABAQUS die zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung (6.38) benötigte Dichte nicht als Funktion der Temperatur vorgegeben werden kann, wurde die spezifische Wärme $c(\theta)$ gemäß

$$\rho c(\theta) = \rho(\theta)^* c(\theta)^* \quad , \quad (9.1)$$

²Um dies simulieren zu können wäre ein Schädigungsmodell für duktile Schädigung und eine andere Fließfunktion nötig (s. z.B. TVERGAARD/NEEDLEMAN [77]). TOMITA gibt in [69] einen ausführlichen Überblick zur Simulation plastischer Instabilitäten, einschließlich Scherbänder.

unter der Annahme einer konstanten Dichte von $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, umgerechnet, wobei $\rho(\theta)^*$ und $c(\theta)^*$ den Literaturwerten entsprechen.

Im Rahmen der hier vorgestellten Untersuchungen wurden folgende Parameterstudien durchgeführt:

- $\theta_i = [400, 900] \text{ }^\circ\text{C}$; $t = 3600 \text{ s}$, $\varphi_0 = 38.75^\circ$
- $t = [0, 3600] \text{ s}$; $\theta_i = 900 \text{ }^\circ\text{C}$, $\varphi_0 = 38.75^\circ$
- $\varphi_0 = [0, 75]^\circ$; $\theta_i = 900 \text{ }^\circ\text{C}$, $t = 3600 \text{ s}$.

Den anschließend durchgeführten Spannungsanalysen wurden die aus den Wärmeausbreitungsrechnungen resultierenden Temperaturverteilungen als Anfangsbedingung vorgegeben und für einen vorgeschlagenen Innendruck p unter Zuhilfenahme des Pfadverfolgungsalgorithmus das Anfangs-Randwertproblem gelöst. Die Abbildungen 9.6 bis 9.8 zeigen die aus den FE-Rechnungen ermittelten maximal ertragbaren Innendrucke p_{max} sowie die zugehörigen $p - \Delta V$ -Kurven.

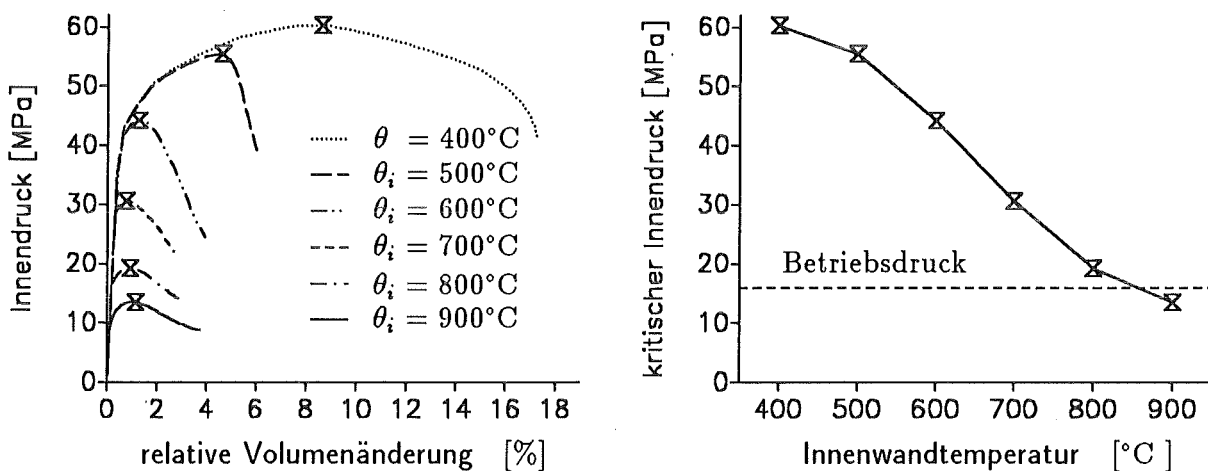


Abb. 9.6: Verformungsverhalten des RDBs sowie die zugehörigen kritischen Innendrucke p_{max} in Abhängigkeit von der Innenwandtemperatur θ_i für eine ringförmige Wärmeeinflußzone; $\varphi_0 = 38.75^\circ$, $t = 3600 \text{ s}$, $\theta_0 = 400^\circ\text{C}$.

Es zeigt sich, daß das Verformungsverhalten und der maximal ertragbare Innendruck sehr stark von den Parametern Innenwandtemperatur, Zeit und Lage der axialsymmetrischen Temperaturverteilung abhängt. Es werden für unterschiedliche Kombinationen dieser Parameter kritische Innendrucke ermittelt, die unterhalb des Betriebsdrucks eines Druckwasserreaktors (16 MPa) liegen. Es ist weiterhin erkennbar, daß bei den meisten hier vorgegebenen Imperfektionen die Innenvolumenzunahme im Bereich weniger Prozent liegt, wobei in fast allen Fällen

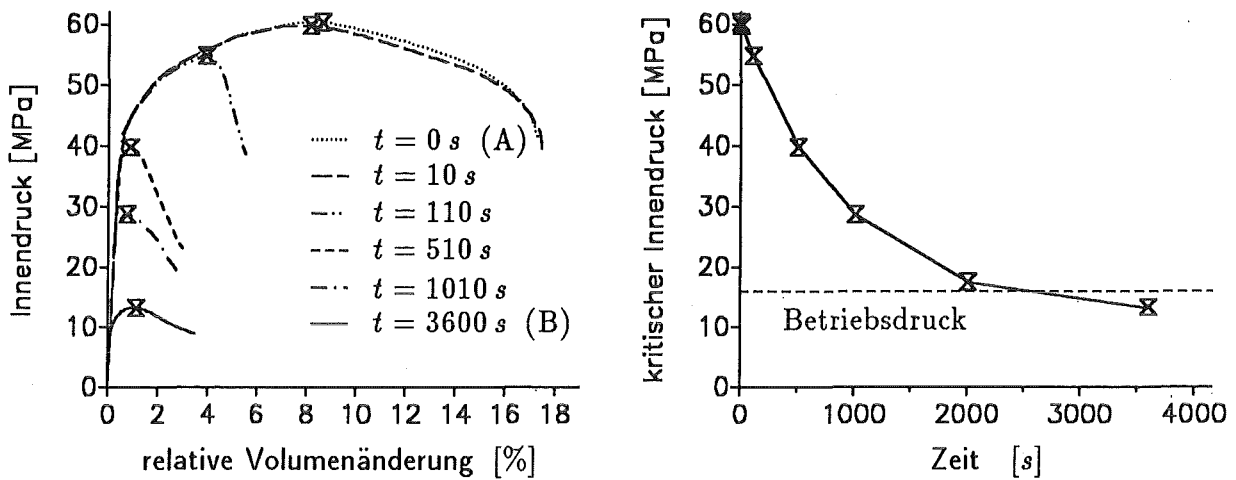


Abb. 9.7: Verformungsverhalten des RDBs sowie die zugehörigen kritischen Innendrucke p_{max} in Abhängigkeit von der Zeit t für eine ringförmige Wärmeinflußzone $\varphi_0 = 38.75^\circ$, $\theta_i = 900^\circ$, $\theta_0 = 400^\circ\text{C}$.

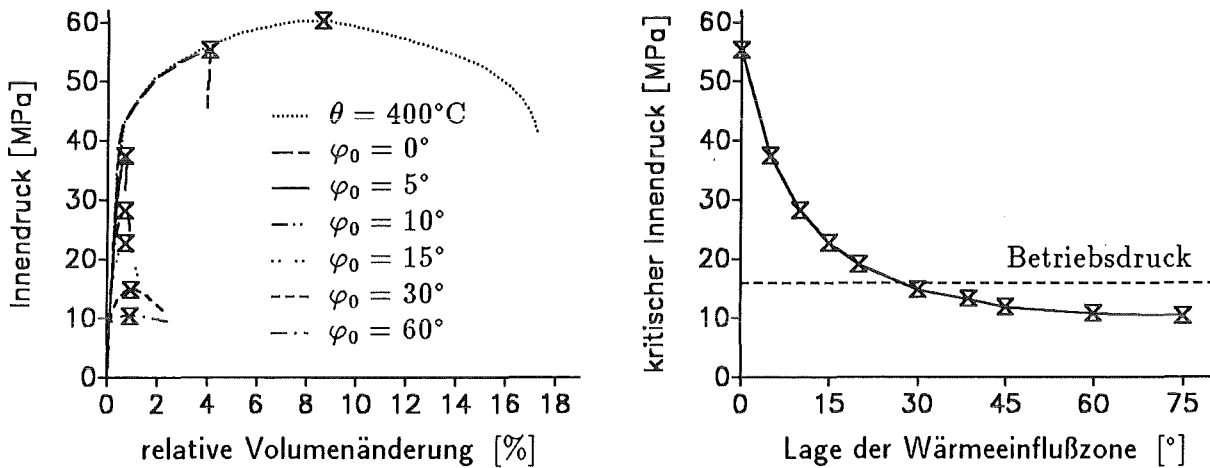


Abb. 9.8: Verformungsverhalten des RDBs sowie die zugehörigen kritischen Innendrucke p_{max} in Abhängigkeit von der Lage der ringförmigen Wärmeinflußzone; φ_0 ; $\theta_i = 900^\circ\text{C}$, $\theta_0 = 400^\circ\text{C}$, $t = 3600\text{ s}$.

eine Verformungslokalisierung am Ort der Störung ermittelt wird, wie an den Steilabfällen der $p - \Delta V$ -Kurven erkennbar ist. Die Ausnahme stellt die sich für $\theta_i = 900^\circ$ und $\varphi_0 = 38.75^\circ$ nach 10s einstellende Temperaturverteilung dar. Für dieses Temperaturfeld wird der Behälter zu einem, der fundamentalen Lösung ähnlichen Verformungsverhalten angeregt. Abbildung 9.9 zeigt die nachkritische Verformung des Behälters für die in Abb. 9.7 mit A und B bezeichneten Fälle bei einer Restwandstärke von ca. 46% im engsten Querschnitt.

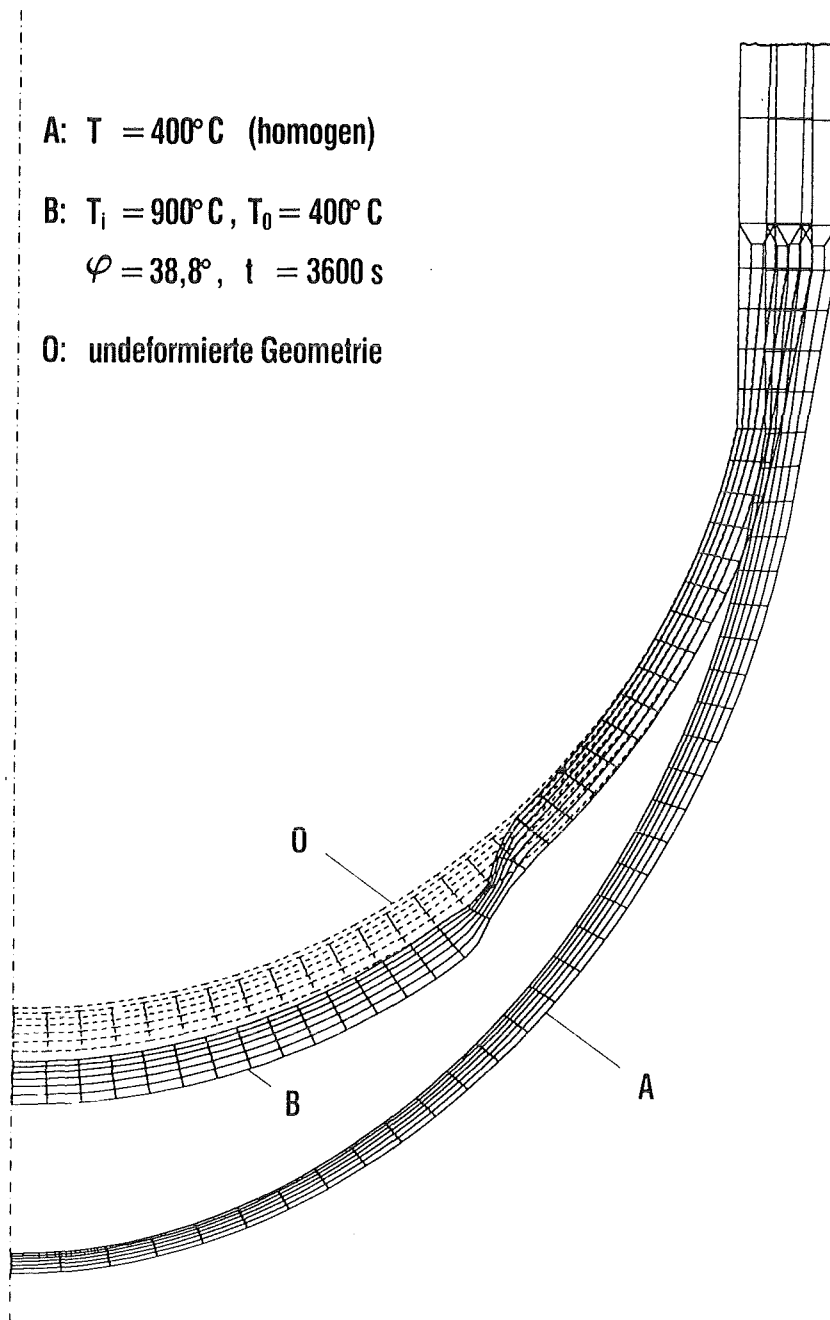


Abb. 9.9: Nachkritische Verformungen des Behälters bei einer Restwandstärke von ca. 46% im engsten Querschnitt für die in Abbildung 9.8 mit A und B bezeichneten Fälle (aus [40]).

Während für den Fall B eine deutliche Einschnürung im Bereich der Wärmeinflusszone erkennbar ist, verformt sich der Behälter im Fall A gleichmäßiger. Dies hat den relativ starken Zuwachs des Innenvolumens zur Folge. Es sei an dieser Stelle noch einmal erwähnt, daß das nachkritische Verformungsverhalten des RDBs auf der Basis der Axialsymmetrie nicht realistisch wiedergegeben wird (s. Kap. 8.2.3).

9.3.2 Dreidimensionale Geometrie

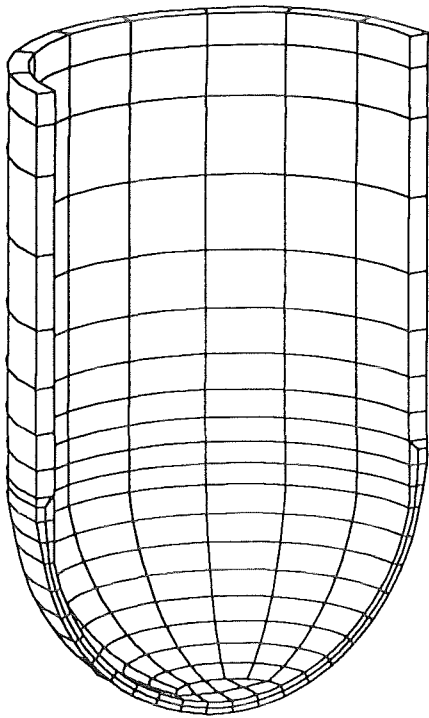
Im Gegensatz zu den im vorigen Kapitel vorgestellten 3-D Rechnungen wird in diesem Abschnitt die Größe des hot spots variiert. Ausgehend von dem in Abb. 8.10 dargestellten dreidimensionalen Netz wurde allen auf der Innenseite, innerhalb der Bereiche A, B und C liegenden Knoten die Temperatur $\theta_i = 900^\circ\text{C}$ aufgeprägt. Die Außenseite wurde wiederum als adiabatisch angenommen. Die aus den Spannungsanalysen für die sich nach $t = 3600\text{s}$ einstellenden Temperaturfelder ermittelten maximal ertragbaren Innendrucke können der Tabelle 9.2 entnommen werden.

Tab. 9.2: Maximal ertragbare Innendrucke für verschiedene Wärmeeinflußzonen; $\theta_i = 900^\circ\text{C}$, $\theta_0 = 400^\circ\text{C}$, $t = 3600\text{s}$, $\varphi_0 = 38.75^\circ$.

	kritischer Innendruck [MPa]
homogenes Temperaturfeld θ_0	60.3
3D (Bereich A)	50.3
3D (Bereich B)	28.8
3D (Bereich C)	18.6
axialsymmetrische Geometrie	13.5

Erwartungsgemäß zeigt sich ein mit Zunahme der Wärmeeinflußzone abnehmender kritischer Innendruck p_{max} . Der Bereich A ist dadurch gekennzeichnet, daß sich in meridionaler Richtung alle mit θ_i beaufschlagten Knoten im Bereich $38.75^\circ \pm 3.75^\circ$ befinden, wodurch sich der direkte Vergleich mit dem Ergebnis einer axialsymmetrischen Rechnung anbietet. Es zeigt sich, daß der mit Hilfe der axialsymmetrischen Rechnungen bestimmte kritische Innendruck deutlich unterhalb des kritischen Innendrucks des lediglich mit dem hot spot beaufschlagten Behälters liegt.

Abbildung 9.10 zeigt das nachkritische Verformungsverhalten des mit dem hot spot "A" beaufschlagten Druckbehälters. Es ist deutlich das unsymmetrische, nachkritische Verformungsverhalten des Behälters erkennbar. Wie bereits im vorigen Kapitel erwähnt wurde, entlastet der Behälter beim Erreichen von p_E am oberen Ende der dem hot spot gegenüberliegenden Seite (s. hierzu auch [39]).



Undeformierte Struktur

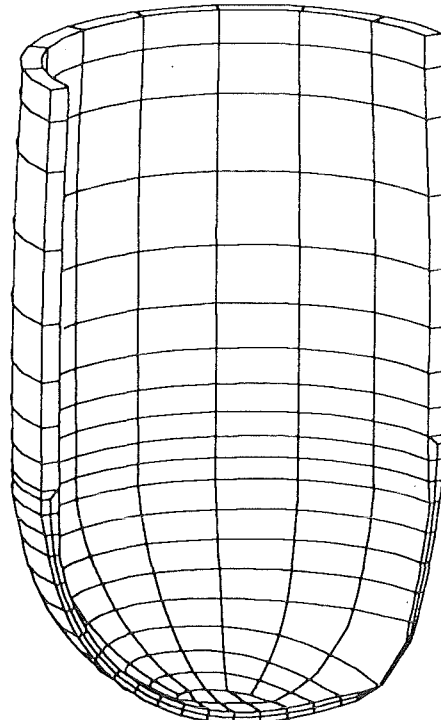
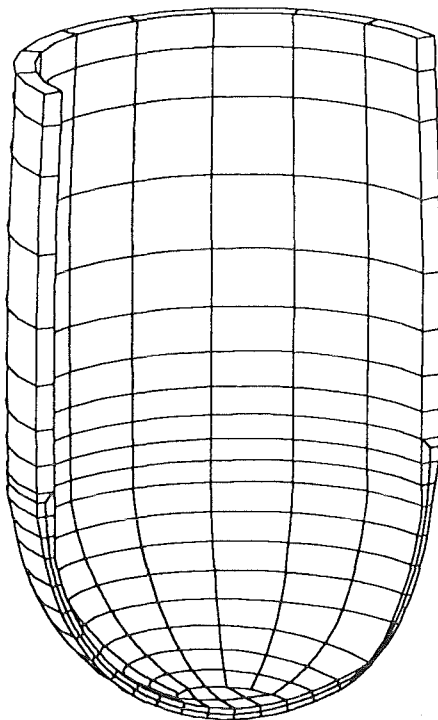
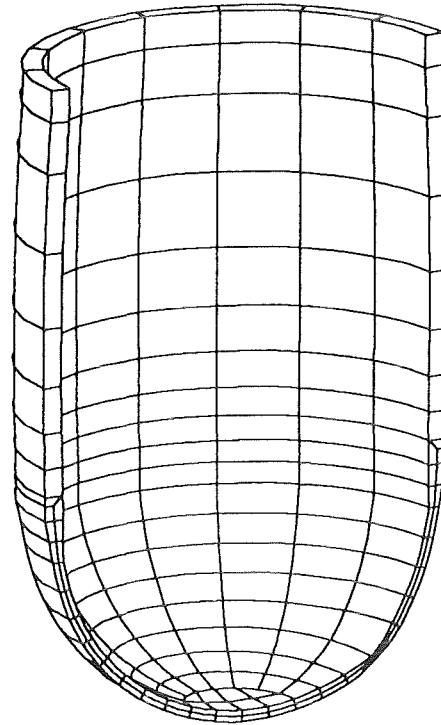


Abb. 9.10: Nachkritische Verformungen des mit dem hot spot "A" (s. Abb. 8.10) beaufschlagten Reaktordruckbehälters (aus [40]).

Kapitel 10

Zusammenfassung

Mit Hilfe des Finite Elemente Programms ABAQUS, Version 4.9, wurden die Auswirkungen von lokalen, zumeist thermischen Imperfektionen auf das Versagensverhalten elasto-plastischer Druckbehälter analysiert. Im Vordergrund stand hierbei die Geometrie eines Druckwasserreaktors, dessen kugelförmige Bodenkalotte mit axialsymmetrischen und punktförmigen Temperaturimperfektionen beaufschlagt wurde.

Mit Hilfe des in ABAQUS standardmäßig implementierten Thermoplastizitätsmodell für kleine elastische und große plastische Deformationen auf der Basis einer v. Mises Fließfunktion wurde das Versagen durch plastische Instabilität untersucht. Die thermomechanische Kopplung, einschließlich der thermoelastischen Effekte blieb unberücksichtigt. Da im Rahmen dieser Arbeit das nachkritische Verformungsverhalten des Behälters von Interesse war, galt es zu überprüfen, ob es sich hierbei um ein Verzweigungsproblem handeln könnte. Da keine Literatur zur Verzweigung eines solchen Behälters bekannt ist, bot es sich zunächst an, die Auswirkung von axialsymmetrischen Imperfektionen bei Kugelschalen genauer zu untersuchen, da hierzu neben analytischen Lösungen auch Finite-Elemente Simulationen von TVERGAARD sowie Experimente von MARIN ET AL. existieren.

Nach einer Darlegung der zum Verständnis dieser Arbeit wichtigsten Grundlagen der Mechanik und der Materialtheorie, wurde auf das zur Herleitung der in Kapitel 5 erläuterten Stabilitäts- und Bifurkationsfunktionale benötigte Plastizitätsmodell eingegangen. Weiterhin wurde das in ABAQUS implementierte Thermoplastizitätsmodell erläutert.

In Kapitel 5 wurde zunächst versucht, das Phänomen der Verzweigung bei elastisch-plastischen Körpern mit Hilfe des Shanley-Modells zu erklären. Aufgrund der Einfachheit dieses 2-Feder-Modells können die wesentlichen Phänomene relativ leicht aufgezeigt werden. Es wurde deutlich, daß bei elastisch-plastischen Körpern der Verlust der Eindeutigkeit nicht gleichbedeutend mit dem Stabilitätsverlust ist. Es zeigt sich, daß die sog. „Tangent Modulus“-Last die niedrigste Last darstellt, ab der eine (im Falle des Shanley-Modells stabile) Verzweigung möglich ist. Eine solche Situation tritt ein, wenn die Belastungsgröße in einem von der Geometrie abhängigen

kritischen Verhältnis zum Tangentenmodul steht. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß eine der beiden Federn die neutrale Belastung erfährt, während die andere weiterhin plastisch belastet. HUTCHINSON zeigte, daß diese Aussage auf elastisch-plastische Körper verallgemeinert werden kann. Eine neutrale Belastung in einer Zone, für die bei der perfekten Geometrie plastische Belastungen ermittelt werden, ist eine hinreichende Bedingung für den Verlust der Eindeutigkeit. Aus der Literatur zum Shanley-Modell ist weiterhin bekannt, daß kleine Störungen der Ausgangslage die niedrigste Verzweigungslast approximieren.

Die Verallgemeinerung führt auf die Frage, ob bei fortgesetzter Deformation ein Körper aus einer gegebenen Referenzkonfiguration in zwei verschiedene mit den Gleichgewichts- und Randbedingungen verträgliche Konfigurationen bewegt werden kann. Aus diesem Grund wird lediglich die Differenz der beiden Geschwindigkeitsfelder untersucht, die den Körper aus der Referenzkonfiguration herausführen. Es wird nun jener (kritische) Zustand gesucht, ab dem zwei verschiedene Lösungen des Anfangs-Randwertproblems möglich sind. Die Differenz der Geschwindigkeitsfelder heißt niedrigste Eigenform oder niedrigster Eigenmodus, das Geschwindigkeitsfeld der zweiten Lösung ist der sogenannte niedrigste Bifurkationsmodus. Neben dem im allgemeinen relevanten niedrigsten Eigenmodus existieren weitere Eigenmoden, für die bei entsprechend höheren Lasten eine Verzweigung möglich ist.

Am Beispiel des axialsymmetrischen Zugstabs wurde nun demonstriert, wie sich die Lage lokaler Imperfektionen bei der Simulation eines Zugversuchs auf das Verformungsverhalten des Stabes auswirkt. Es zeigt sich die aus der Literatur bekannte Aussage, daß lokale Imperfektionen das Verhalten des mit einer globalen Imperfektion kleinerer Amplitude beaufschlagten Bauteils approximiert. Dies setzt jedoch voraus, daß sich die Amplituden der lokalen und der globalen Imperfektionen am selben Ort befinden. Als globale Imperfektion werden jene Imperfektionen bezeichnet, die aus den Eigenformen abgeleitet werden können. Es wurde unterstellt, daß die Eigenform eines Zugstabs der Länge l_0 mit Hilfe einer Kosinusfunktion $\cos(k\pi z/l_0)$ mit $z = [0, l_0]$ beschrieben werden kann. Unter dieser Annahme zeigen die FE-Rechnungen, daß die niedrigste Eigenform durch $k = 1$, gefolgt von $k = 2, 3, 4, \dots$ gegeben ist, was im Einklang mit den aus der Literatur bekannten Ergebnissen steht. Hinreichend weit vom Ende entfernte lokale Imperfektionen führen zu einer dem Modus 2 ähnlichen Verformung, die dadurch gekennzeichnet ist, daß der Zugstab von beiden Enden her entlastet und zu der aus Zugversuchen bekannten Einschnürung am Ort der Imperfektion führt.

Weiterhin wurde gezeigt, daß thermische Imperfektionen bei Verwendung temperaturabhängi-

ger Materialparameter eine ähnliche Wirkung besitzen wie geometrische.

Für die durch Innendruck belastete Kugel zeigt sich auf der Grundlage der Axialsymmetrie und unter der Annahme kosinusförmiger Eigenmoden, daß der niedrigste Bifurkationsmodus durch $k = 1$ gegeben ist, wobei die Stabilität deutlich vor der Eindeutigkeit verloren geht. Dies steht im Einklang mit der Literatur. Das nachkritische Verformungsverhalten ist dadurch gekennzeichnet, daß bei weiterer Zunahme des Innenvolumens weiterhin große Bereiche der Kugel plastisch belastet werden, ohne jedoch eine Einschnürung am Pol zu zeigen. Für die globalen Imperfektionen mit $k = 2, 4$ wird erst bei einem relativ hohen Innenvolumen eine Verzweigung von der fundamentalen Lösung ermittelt, obwohl für $k = 2$ der maximal ertragbare Innendruck niedriger ist als bei der ersten Eigenform. Nach Erreichen jenes Innendruck, bei dem zum erstenmal Entlastungen ermittelt werden, führt im Falle $k = 2$ eine weitere Zunahme des Innenvolumens zu einer sofortigen Einschnürung am Äquator. Bei der Variation der Lage lokaler Imperfektionen $\varphi_0 = [0, \pi/2]$ zeigte sich eine kontinuierliche Abnahme des maximal ertragbaren Innendruckes für zunehmende φ_0 . Dieses Verhalten erscheint plausibel, da sich mit Zunahme von φ_0 der Durchmesser des mit der Imperfektion beaufschlagten Bereichs vergrößert. Im nachkritischen Bereich zeigte sich diese Tendenz jedoch nicht, obwohl sich Imperfektionen besonders im nachkritischen Bereich stark auswirken sollten. Für hinreichend große φ_0 wurde die Kugel zu einer typischen Modus-1-Verformung angeregt. Gestützt durch experimentelle Ergebnisse von MARIN ET AL. wurde daraus gefolgert, daß das nachkritische Verformungsverhalten einer mit Innendruck beaufschlagten Kugel auf der Basis der Axialsymmetrie nicht realistisch simuliert werden kann.

Zu einer ähnlichen Schlußfolgerung führten die Untersuchungen zum Reaktordruckbehälter, wobei sich die Argumentation schwieriger gestaltete. Aufgrund seiner Geometrie ist der Pol des perfekten Behälters die höchstbeanspruchte Stelle. Es zeigte sich, daß bei Vorgabe einer axialsymmetrischen Störung im Pol mit verschwindender Amplitude die fundamentale Lösung des Behälters angenähert wird, wodurch gezeigt wurde, daß es sich hierbei um kein axialsymmetrisches Verzweigungsproblem handeln kann. Aufgrund der allgemeinen inhomogenen Spannungsverteilung wurde erwartet, daß für eine außerhalb des Pols eingebrachte Imperfektion eine Mindestamplitude der Störung notwendig ist, um den Ausgangspunkt des Versagens weg vom Pol an den Ort der Imperfektion zu ziehen. Dies wurde mit Hilfe von 3D-Rechnungen bestätigt. Eine abseits des Pols vorgegebene punktförmige Imperfektion führt ab einer kritischen Amplitude zur Verformungslagerung am Ort der Imperfektion. Die Verformungslagerung

kalisierung läuft in diesem Fall nichtaxialsymmetrisch ab. Diese Imperfektion stellt somit den Ausgangspunkt eines nichtaxialsymmetrischen Behälterversagens dar. Die sprunghafte Änderung des Verformungsverhaltens erinnert stark an ein Verzweigungsproblem. Es stellt jedoch für die außerhalb des Pols vorgegebenen Imperfektionen, aufgrund der benötigten Mindestamplitude kein Verzweigungsproblem im eigentlichen Sinne dar. Lediglich im Pol ist mit einem Verzweigungsproblem relativ zur Umfangsrichtung zu rechnen.

Zum Abschluß wurden auf der Grundlage der aus Zugversuchen identifizierten Materialparametern einige Tragfähigkeitsanalysen für den Reaktordruckbehälter durchgeführt. Da beim Zugversuch die Zugstäbe nach Erreichen der Zugfestigkeit einschnürten, wurden die das nachkritische Verformungsverhalten beschreibenden Parameter durch eine trial and error Prozedur mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente ermittelt. Die Einschnürung wurde durch Vorgabe eines imperfekten Zugstabs erzielt. Es sei an dieser Stelle die Wichtigkeit einer möglichst genauen Anpassung der Materialparameter betont, da die Stabilitätsgrenze eines Bauteils erreicht ist, wenn die anliegende Spannung in einem von der Bauteilgeometrie abhängigen kritischen Verhältnis zum Tangentenmodul steht.

Es wurden einige axialsymmetrische Temperaturverteilungen ermittelt, die einzig und allein aufgrund der mit zunehmender Temperatur abnehmenden Festigkeit des Werkstoffs die Tragfähigkeitsgrenze unterhalb den Betriebsdrucks des Reaktors drücken. Die Variation der Größe eines hot spots ergab die zu erwartende starke Abhängigkeit des maximal ertragbaren Innendruck von der geometrischen Abmessung der Wärmeeinflußzone.

Anhang A

Zum Shanley Modell: Herleitung von $\frac{d^2 P}{d\phi^2}$

Mit

$$C_A := P_0 (E - E_t) + 4 E E_t r \sin\phi$$

$$C_B := (E - E_t) + (E + E_t) \frac{l}{r} \tan\phi$$

und deren Ableitungen

$$C'_A = \frac{dC_A}{d\phi} = 4 E E_t r \cos\phi$$

$$C'_B = \frac{dC_B}{d\phi} = (E + E_t) \frac{l}{r \cos^2\phi}$$

folgt für (5.23) zunächst

$$\frac{dP}{d\phi} = \frac{C'_A C_B - C_A C'_B}{C_B^2}$$

Daraus ergibt sich unter Beachtung der Quotientenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{d\phi^2} &= \frac{(C''_A C_B - C'_A C'_B + C'_A C'_B - C_A C''_B) C_B^2 - (C'_A C_B - C_A C'_B)(2 C_B C'_B)}{C_B^4} \\ &= \frac{(C''_A C_B - C_A C''_B) C_B^2 - (C'_A C_B - C_A C'_B)(2 C_B C'_B)}{C_B^4} \end{aligned}$$

mit

$$C''_A = \frac{d^2 C_A}{d\phi^2} = -4 E E_t r \sin\phi$$

$$C''_B = \frac{d^2 C_B}{d\phi^2} = (E + E_t) \frac{2l \tan\phi}{r \cos^2\phi}$$

An der Stelle $\phi = 0$ folgt für die zweite Ableitung von P

$$\left. \frac{d^2 P}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = \frac{2 P_0 l^2 / r^2 (E + E_t)^2 - 8 l (E + E_t) E E_t}{(E - E_t)^2} ,$$

woraus sich für die drei charakteristischen Pfade schließlich folgende Beziehungen ergeben:

$$\lambda_R : \quad P_0 = \frac{4 E E_t}{(E + E_t)} \frac{r^2}{l} \Rightarrow \left. \frac{d^2 P}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = 0$$

$$\lambda \rightarrow 1 : \quad P_0 = 2 E_t \frac{r^2}{l} \Rightarrow \left. \frac{d^2 P}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = \frac{4 l E_t (E + E_t) (E_t - E)}{(E - E_t)^2} < 0$$

$$\lambda \rightarrow (-1) : \quad P_0 = 2 E \frac{r^2}{l} \Rightarrow \left. \frac{d^2 P}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = \frac{4 l E (E + E_t) (E - E_t)}{(E - E_t)^2} > 0$$

Anhang B

Die den FE-Rechnungen zu Kapitel 9.3 zugrunde gelegten temperaturabhängigen Materialparameter

Tab. A.1: Wärmeleitfähigkeit k , spezifische Wärme c und Dichte ρ des Reaktorbaustahls (aus [16]).

θ [°C]	k [W/m K]	c [J/kg K]	ρ [kg/m ³]
20	44.4	435	7850
200	43.2	500	7800
400	39.4	543	7730
600	33.0	600	7650
800	27.0	700	7600
1000	27.0	700	7500
1200	30.0	690	7350
1400	32.0	685	7200
1600	33.0	685	7100
2200	34.0	680	7000

Tab. A.2: Der Elastizitätsmodul E und die Querkontraktionszahl ν .

θ [°C]	E [MPa]	ν []
23	194000.	0.3
200	205000.	0.3
300	175000.	0.3
400	165000.	0.3
500	150000.	0.304
600	136000.	0.307
700	130000.	0.312
800	60000.	0.324
900	16500.	0.324

Tab. A.3: Die aus den Zugversuchen ermittelten Wertepaare (k, s) .

23°C	
k [MPa]	s [%]
460.00	0.00
578.32	3.03
632.43	5.00
666.94	6.97
696.50	11.31
739.95	20.00
769.95	30.00
779.95	40.00
782.95	70.00

200°C	
k [MPa]	s [%]
400.00	0.00
493.93	1.69
554.33	3.35
603.97	5.50
622.59	8.54
648.43	15.00
653.93	70.00

300°C	
k [MPa]	s [%]
420.00	0.00
503.10	1.31
574.32	3.07
626.27	5.62
638.94	7.61
681.33	50.00

400°C	
k	s
[MPa]	[%]
370.00	0.00
455.16	1.02
531.68	2.96
576.68	5.33
603.86	9.92
634.11	20.00
709.11	50.00
711.11	70.00

500°C	
k	s
[MPa]	[%]
355.00	0.00
387.08	0.30
409.31	0.80
429.06	1.85
435.39	3.31
493.80	20.00
538.80	50.00
540.80	70.00

600°C	
k	s
[MPa]	[%]
290.00	0.00
306.93	0.41
309.65	1.29
557.08	125.00
559.58	150.00

700°C	
k	s
[MPa]	[%]
147.00	0.00
151.30	0.75
152.13	1.29
525.51	300.00

800°C	
k	s
[MPa]	[%]
61.00	0.00
69.50	1.26
76.73	2.77
86.09	6.41
99.34	20.35
351.02	300.00

900°C	
k	s
[MPa]	[%]
45.00	0.00
53.16	3.30
57.00	5.49
68.39	17.83
74.38	26.34
265.94	300.00

Literaturverzeichnis

- [1] ALEX, H. ET AL.: *Untersuchungen von mechanischen Auswirkungen eines Kernschmelzunfalls auf den RDB und die umgebenden Gebäudeteile*. Beitrag zur deutschen Risikostudie Phase B - ND* Pfad, Gesellschaft für Reaktorsicherheit (1988).
- [2] BATHE, K.-J.: *Finite Elemente Methoden*. Springer Verlag Berlin/Heidelberg /New York/Tokyo 1986.
- [3] BECKER, E. / BÜRGER, W.: *Kontinuumsmechanik*. Teubner-Verlag Stuttgart 1975.
- [4] BOER, R. DE: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer-Verlag Berlin/Heidelberg/New York 1982.
- [5] BRONSTEIN, I.N. / SEMENDJAJEW, K.A. *Taschenbuch der Mathematik*, 22. Auflage, Verlag Harri Deutsch, Thun/Frankfurt(Main) 1985.
- [6] BRUHNS, O.: *Einige Bemerkungen zur Bestimmung von Verzweigungslasten elastoplastischer Kontinua*. Habilitationsschrift, erschienen als Mitteilung Nr. 74-9 des Instituts für konstruktiven Ingenieurbau der Ruhr-Universität Bochum, 1974.
- [7] BRUHNS, O. / MIELNICZUK J.: *Zur Theorie der Verzweigungen nicht-isothermer elastoplastischer Deformationen*. Ingenieur-Archiv 46 (1977), S. 65-74.
- [8] BRUHNS, O.: *Bifurcation Problems in Plasticity*. In LEHMANN, TH. (Ed.): *The Constitutive Law in Thermoplasticity*, CISM Courses and Lectures, No. 281, Springer-Verlag Wien/New York 1984, S. 465 - 540.
- [9] BUSHNELL, D.: *Computerized Buckling Analysis of Shells*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht/Boston/Lancaster 1985.
- [10] CHENG, W.H.: *Necking of a Bar*. Int. J. Solids Structures, Vol. 7 (1971), S. 685-717.
- [11] CHENG, S.Y./ ARIARATNAM. S.T. / DUBEY, R.N.: *Axisymmetric Bifurcation in an Elastic-Plastic Cylinder under Axial Load and Lateral Hydrostatic Pressure*. Quart. Appl. Math. (April 1971), S. 41-51.
- [12] CHU, C.C.: *Bifurcation of Elastic-Plastic Circular Cylindrical Shells under Internal Pressure*. J. Appl. Mech., Vol. 46 (1979), S. 889-894.
- [13] CRISFIELD, M.A.: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Volume 1. Verlag John Wiley & Sons Chichester (UK), 1991.
- [14] CROSSLAND, B. / JORGENSEN, S.M. / BONES, J.A.: *The Strength of Thick-Walled Cylinders*. Journal of Engineering for Industry Vol. 81, S. 95-114, 1959.

- [15] FAUPEL, H. *Yield and Bursting Characteristics of Heavy-Wall Cylinders*. Transactions of the ASME, Vol. 78 (1956), S. 1031-1064.
- [16] GESELLSCHAFT FÜR REAKTORSICHERHEIT (GRS): *Deutsche Risikostudie Kernkraftwerke Phase B*. Verlag TÜV Rheinland, 1990.
- [17] GRÄFEN, H.(Hrsg.): *Lexikon Werkstofftechnik*, VDI-Verlag Düsseldorf 1991.
- [18] GURTIN, M.E.: *An Introduction to Continuum Mechanics*. Academic Press New York 1981.
- [19] HAUPT, P.: *Foundation of Continuum Mechanics*. In HUTTER, C. (Ed.): *Continuum Mechanics in Environmental Sciences and Geophysics*, CISM Courses and Lectures, No. 337, Springer-Verlag (1993), S. 1-77.
- [20] HAUPT, P.: *Thermodynamics of Solids*. In MUSCHIK, W. (Ed.): *Non-Equilibrium Thermodynamics with Application to Solids*, CISM Courses and Lectures, No. 336, Springer-Verlag Wien 1993, S. 65-138.
- [21] HAUPT, P. / TSAKMAKIS, CH.: *On the Application of Dual Variables in Continuum Mechanics*. *Continuum Mech. Thermodyn.*, Vol. 1 (1989), S. 165-196.
- [22] HIBBITT, KARLSSON & SORENSEN, INC.: *ABAQUS User's Manual*. Version 4.8, 1989.
- [23] HIBBITT, KARLSSON & SORENSEN, INC.: *ABAQUS Theory Manual*. Version 4.8, 1989.
- [24] HILL, R.: *Aspects of Invariance in Solid Mechanics*. *Advan. Appl. Mech.*, Vol. 18 (1978), S. 1-75.
- [25] HIPPELEIN, K. ET AL.: *Phänomenologische Behälterberstversuche*. Abschlußbericht zum Forschungsvorhaben 1500 279, Staatliche Materialprüfungsanstalt Stuttgart (MPA), 11/1989.
- [26] HUNT, G.W. / BURGAN, B.A.: *Hidden Asymmetries in the Shanley Model*. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 33, No. 1 (1985), S. 83-94.
- [27] HUTCHINSON, J.W. / KOITER, W.T.: *Postbuckling Theory*. *Appl. Mech. Rev.* 23 (1970), S. 1353-1366.
- [28] HUTCHINSON, J.W.: *On the Postbuckling Behavior of Imperfection-Sensitive Structures in the Plastic Range*. *J. Appl. Mech.*, Vol. 39 (1972), S. 155-162.
- [29] HUTCHINSON, J.W.: *Post-Bifurcation Behavior in the Plastic Range*. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 21 (1973), S. 163-190.
- [30] HUTCHINSON, J.W.: *Imperfection Sensitivity in the Plastic Range*. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 21 (1973), S. 191-204.

- [31] HUTCHINSON, J.W. / MILES, J.P.: *Bifurcation Analysis of the Onset of Necking in an Elastic/Plastic Cylinder under Uniaxial Tension*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 22 (1974), S. 61-71.
- [32] HUTCHINSON, J.W.: *Plastic Buckling*. Advan. Appl. Mech. Vol. 14 (1974), S. 67-144.
- [33] HUTCHINSON, J.W.: *Survey of some Recent Work on the Mechanics of Necking*. In KELLY, R.E. (Ed.): Proc. 8.th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech., Wester Periodicals 1979, S. 87-98.
- [34] JOHNSON, W. / MELLOR, P.B.: *Engineering Plasticity*. Van Nostrand Reinhold Company London 1973.
- [35] JONAS, J.J. / HOLT, R.A. / COLEMAN, C.E.: *Plastic Instability in Tension and Compression*. Acta Metallurgica, Vol. 24 (1976), S. 911-918.
- [36] JORGENSEN, S.M.: *Overstrain Test in Thick-Walled Cylinders*. Journal of Engineering for Industry, Vol. 82 (1960), S. 103-121.
- [37] KLINGBEIL, E.: *Tensorrechnung für Ingenieure*. B.I.-Hochschultaschenbücher, Band 197, B.I.-Wissenschaftsverlag (1989).
- [38] KUHN, W.: *Ermittlung von Festigkeits- und Verformungskennwerten des Stahls 20 MnMoNi 55 bei Temperaturen zwischen 200°C und 900°C*. Studienarbeit am Institut für Zuverlässigkeit und Schadenskunde der Universität Karlsruhe, 1991.
- [39] LÄMMER, H. / RITTER, B. / TSAKMAKIS, CH.: *Diskussion plastischer Instabilitäten eines Druckbehälters mit Hilfe der Methode der Finiten Elemente*. Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK 5362, 1994.
- [40] LÄMMER, H. / RITTER, B.: *Untersuchungen zum Versagen eines Reaktordruckbehälters durch plastische Instabilität*. Kernforschungszentrum Karlsruhe, KfK-Nachrichten 26, 3/94, 1994.
- [41] LARSSON, M. ET AL.: *Instability and Failure of Internally Pressurized Ductile Metal Cylinders*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 30, S. 121-154, 1982.
- [42] MACHERAUCH, E.: *Praktikum in Werkstoffkunde*. 7. Auflage, Fr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft Braunschweig/Wiesbaden 1987.
- [43] MARIN, J. / DUTTON, V.L. / FAUPEL, J.H.: *Tests of Spherical Shells in the Plastic Range*. Welding Journal, Vol. 27 (1948), S. 593s-607s.
- [44] MILES, J.P.: *Bifurcation in Rigid/Plastic Materials under Spherically Symmetric Loading Conditions*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 17 (1969), S. 303-313.
- [45] MILES, J.P.: *Bifurcation in Plastic Flow under Uniaxial Tension*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 19 (1971), S. 89-102.

- [46] NAGHDI, P.M.: *Plasticity*. Proc. 2nd Symp. Naval Struct. Mech., Pergamon Press 1960, S. 121-169.
- [47] NEEDLEMAN, A.: *A Numerical Study of Necking in Circular Cylindrical Bars*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 20 (1972), S. 111-127.
- [48] NEEDLEMAN, A.: *Bifurcation of Elastic-Plastic Spherical Shells Subject to Internal Pressure*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 23 (1975), S. 357-367.
- [49] NICHOLS F.A.: *Plastic Instability and Uniaxial Tensile Ductilities*. Acta Metallurgica, Vol. 28 (1980), S. 663-673.
- [50] NORRIS, D.M. ET AL.: *A Computer Simulation of the Tension Test*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 26 (1978), S. 1-19.
- [51] NUNES, J. / LARSON, F.R.: *A Method for Determining the Plastic Flow Properties of Sheet and Round Tensile Test Specimens*. ASME Proc., Vol. 61 (1961), S. 1349-1361.
- [52] OGDEN, R.W.: *Non-linear Elastic Deformations*. Ellis Horwood Limited. Halstet Press., 1984.
- [53] RANIECKI, B. / BRUHNS O.T.: *Bounds to Bifurcation Stresses in Solids with Non-Associates Plastic Flow Law at Finite Strain*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 29 (1981), S. 153-172.
- [54] REMPE, J.L. ET AL.: *Light Water Reactor Lower Head Failure Analysis*. NUREG/CR-5642 EGG-2618 1993.
- [55] RIKS, E.: *The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability*. J. Appl. Mech., Vol. 39 (1972), S. 1060-1065.
- [56] RITTER, B.: *On the Load Carrying Capacity of a Pressurised and Externally Cooled Reactor Pressure Vessel*. Proc. OECD Workshop on Large Molten Pool Heat Transfer, Centre d'Études Nucléaires de Grenoble (France) 1994, S. 111-139.
- [57] ROACH, D.P. / PRIDDY, T.G.: *Effect of Material Properties on the Strain to Failure of Thick-Walled Cylinders Subjected to Internal Pressure*. Journal of Pressure Vessel Technology, Vol. 116 (1994), S. 97-104.
- [58] ROYER, C.P. / ROLFE, S.T. / EASLEY J.T.: *Effect of Strain Hardening on Bursting Behavior of Pressure Vessels*. Proc. Second International Conference on Pressure Vessel Technology, Part II, ASME 1973, S. 1071-1088.
- [59] RUBIN, A.M.: *Overview and Organization of TMI-2 VIP*. Proc. Three Miles Island Reactor Pressure Vessel Investigation Project, OECD Publications, Paris 1994, S. 63-79.

- [60] SEWELL, M.J.: *The Static Perturbation Technique in Buckling Problems*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13 (1965), S. 247-265.
- [61] SEWELL, M.J.: *A Survey of Plastic Buckling*. In Leipholz, H.H.E.: SM Study No. 6, University of Waterloo 1972.
- [62] SMIDT, D.: *Reaktor-Sicherheitstechnik*. Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New York 1979.
- [63] STADIE, K.: *The VIP Challenge. What Happend to TMI's Reactor Pressure Vessel*. Nuclear Engineering International (March 1994), S. 38-40.
- [64] STORÅKERS, B.: *On Uniqueness and Stability under Configuration-Dependent Loading of Solids with or without a Natural Time*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 25 (1977), S. 269-287.
- [65] STRIFORS, H. / STORÅKERS, B.: *Uniqueness and Stability of Rigid-Plastic Spherical Shells to Finite Deformation under Hydrostatic Pressure*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 21 (1973), S. 125-134.
- [66] TAKLA, M.: *Verzweigungslasten elastoplastisch beanspruchter dickwandiger Behälter*. Dissertation, erschienen als Mitteilung Nr. 6 des Instituts für Mechanik der Universität (GH) Kassel (1987).
- [67] THOMASON, P.F.: *An Analysis of Necking in Axi-Symmetric Tension Specimens*. Int. J. Mech. Sci., Vol. 11 (1969), S. 481-490.
- [68] THOMPSON, J.M.T. / HUNT, G.W.: *Collapse: The Buckling of Structures in Theory and Practice*. Symposium, University College, London 1982, Cambridge University Press 1983.
- [69] TOMITA, Y.: *Plastic Instabilities in Solid Mechanics*. Appl. Mech. Rev., Vol. 47, No. 6, Part 1 (1994), S. 171-205.
- [70] TRIANTAFYLIDIS, N. / KWON, Y.J.: *Thickness Effects on the Stability of Thin Walled Structures*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 35, No. 5 (1987), S. 643-674.
- [71] TRUESDELL, C. / NOLL, W.: *Non-Linear Field Theories of Mechanics*. In FLÜGGE, S. (Ed.): *Handbuch der Physik*, Band III/3, Springer-Verlag Berlin / Heidelberg / New York 1965.
- [72] TRUESDELL, C.: *A First Course in Rational Continuum Mechanics* Vol. 1. 2nd edition, Academic Press Boston/San Diego/New York 1991.
- [73] TUĞCU, P.: *Tensile Instability in a Round Bar Including the Effect of Material Strain-Rate Sensitivity*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 93 (1991), S. 335-351.

- [74] TSAKMAKIS, CH.: *Über inkrementelle Materialgleichungen zur Beschreibung großer inelastischer Deformationen*. Dissertation, erschienen in: Fortschr.-Ber. VDI Reihe 18 Nr. 36, VDI Verlag Düsseldorf 1994.
- [75] TSAKMAKIS, CH.: *Methoden zur Darstellung inelastischen Materialverhaltens bei kleinen Deformationen*. Habilitationsschrift, erschienen als Bericht 5/1994 des Instituts für Mechanik der Universität (GH) Kassel (1994).
- [76] TVERGAARD, V.: *Effect of Thickness Inhomogenities in Internally Pressurized Elastic-Plastic Spherical Shells*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 24 (1976), S. 291-304.
- [77] TVERGAARD, V.: *Bifurcation and Imperfection-Sensitivity at Necking Instabilities*. ZAMM 60 (1980), S. T 26 - T 34.
- [78] TVERGAARD, V.: *Necking in Tensile Bars with Rectangular Cross-Section*. Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 103 (1993), S. 273-290.
- [79] WANG, C.C. / TRUESDELL, C.: *Introduction to Rational Elasticity*. Noordhoff International Publishing, Leyden (NL) 1973.
- [80] WEGENER, K.: *Zur Berechnung großer plastischer Deformationen mit einem Stoffgesetz vom Überspannungstyp*. Dissertation, erschienen als Braunschweiger Schriften zur Mechanik Nr.2-1991, Institut für Allgemeine Mechanik und Festigkeitslehre der Universität Braunschweig (1991).
- [81] ZIENKIEWICZ, O.C.: *The Finite Element Method*. Third Edition, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited 1977.