http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~semlv
Seminar LV, No. 11, 6 pp., *19.07.2001*

O stabilności równań funkcyjnych o jednej zmiennej

Peter Volkmann[1]

Zusammenfassung. Es sei E ein Banachraum, Z eine Menge und $\varphi : Z \to Z$. Bei vorgelegten $f : Z \to E$ und $\varepsilon \geq 0$ ist die Zerlegbarkeit

$$f = h + r \text{ mit } h(\varphi(x)) = 2h(x),\ \|r(x)\| \leq \varepsilon\ (x \in Z)$$

dazu äquivalent, daß mit einer reellen Zahl η gilt:

$$\|f(\varphi^n(x)) - 2^n f(x)\| \leq 2^n\varepsilon + \eta\ (x \in Z;\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Es folgt ein Stabilitätssatz für die Funktionalgleichung $f(\varphi(x)) = 2f(x)$ und anschließend eine Anwendung auf Gleichungen der Form $f(x \circ y) = f(x) + f(y)$ (dabei ist $\circ$ eine innere Verknüpfung auf Z).

1. Niech E będzie przestrzenią Banacha, Z - zbiorem, a $\varphi : Z \to Z$ daną funkcją. Symbolem φ^n oznaczamy n-tą iteratę funkcji φ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Rozważamy równanie funkcyjne

$$f(\varphi(x)) = 2f(x) \quad (x \in Z) \tag{1}$$

dla funkcji $f : Z \to E$. Możemy rozważać też równanie ogólniejsze $f(\varphi(x)) = \omega f(x)$, gdzie $\omega > 1$, ale później - w paragrafie trzecim - będziemy potrzebować jedynie przypadku $\omega = 2$. Pewne rezultaty dotyczące tego ogólniejszego równania podamy na końcu pracy.

W dalszym ciągu f będzie oznaczało raczej zaburzenia rozwiązania równania (1). Następujące twierdzenie jest w duchu prac [1], [5], [12]; zasadniczym krokiem jego dowodu jest granica (3), znana w literaturze (Pólya i Szegő [9], zadanie I 99; Hyers [6]; Forti [4], prop.1).

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że dana jest funkcja $f : Z \to E$ i liczba $\varepsilon \geq 0$. Wówczas następujące dwa warunki są równoważne:*

(P) *$f = h + r$, gdzie $h(\varphi(x)) = 2h(x)$, $\|r(x)\| \leq \varepsilon$ $(x \in Z)$.*

(Q) *Istnieje taka liczba rzeczywista η, że*

$$\|f(\varphi^n(x)) - 2^n f(x)\| \leq 2^n\varepsilon + \eta \quad (x \in Z;\ n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

[1] Praca powstała w czasie pobytu na Uniwersytecie Śląskim w Katowicach wiosną 2001 roku na zaproszenie Instytutu Matematyki tego uniwersytetu.

Dowód. Jeśli spełniony jest warunek (P), to $h(\varphi^n(x)) = 2^n h(x)$, skąd

$$\begin{aligned}\|f(\varphi^n(x)) - 2^n f(x)\| &= \|h(\varphi^n(x)) + r(\varphi^n(x)) - 2^n h(x) - 2^n r(x)\| \\ &\le \|r(\varphi^n(x))\| + 2^n\|r(x)\| \le (2^n+1)\varepsilon,\end{aligned}$$

tj. zachodzi (Q) z liczbą η równą ε. Na odwrót, z warunku (Q) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{1}{2^n}f(\varphi^n(x)) - \frac{1}{2^{n+m}}f(\varphi^{n+m}(x))\right\| \\ = \; &\frac{1}{2^{n+m}}\,\|2^m f(\varphi^n(x)) - f(\varphi^m(\varphi^n(x)))\| \le \frac{1}{2^{n+m}}(2^m\varepsilon + \eta) \le \frac{1}{2^n}(\varepsilon + |\eta|).\end{aligned}$$

Tak więc $\frac{1}{2^n}f(\varphi^n(x))$ jest ciągiem Cauchy'ego w przestrzeni Banacha E, a zatem istnieje granica

$$h(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f(\varphi^n(x)) \; (x \in Z). \tag{3}$$

Dla dowodu warunku (P) wystarczy sprawdzić, że dla tak określonej funkcji $h : Z \to E$ mamy

$$h(\varphi(x)) = 2h(x) \qquad (x \in Z), \tag{4}$$

$$\|h(x) - f(x)\| \le \varepsilon \quad (x \in Z). \tag{5}$$

Otóż (4) wynika z (3), a (5) stąd, że

$$\left\|\frac{1}{2^n}f(\varphi^n(x)) - f(x)\right\| = \frac{1}{2^n}\|f(\varphi^n(x)) - 2^n f(x)\| \le \varepsilon + \frac{1}{2^n}\eta \to \varepsilon \; (n \to \infty).$$

Uwaga. *Funkcje h oraz r występujące w warunku* (P) *są wyznaczone jednoznacznie:* Jeśli mamy dwa takie rozkłady

$$f = h_1 + r_1 = h_2 + r_2$$

funkcji f, to dla funkcji $g = h_1 - h_2 = r_2 - r_1$ dostajemy $g(\varphi(x)) = 2g(x)$ oraz $\|g(x)\| \le 2\varepsilon$. Stąd

$$2^n\|g(x)\| = \|g(\varphi^n(x))\| \le 2\varepsilon \; (x \in Z; n = 1, 2, 3, \ldots)$$

i wobec tego g znika identycznościowo.

2. Stabilność. Podzbiór W przestrzeni Banacha E jest *idealnie wypukły* (Lifšic [7]), gdy dla każdego ograniczonego ciągu $d_1, d_2, d_3, \ldots$ jego elementów i dla takich liczb $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \ge 0$, że $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = 1$ mamy $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n d_n \in W$.

Następujący rezultat jest pewną wersją twierdzenia Jacka Tabora [10] o stabilności w sensie Pólyi-Szegő-Hyersa-Ulama.

Twierdzenie 2. *Niech W będzie ograniczonym i idealnie wypukłym podzbiorem przestrzeni E, a funkcja $f : Z \to E$ spełnia*

$$f(\varphi(x)) - 2f(x) \in W \ (x \in Z). \tag{6}$$

Wówczas istnieje dokładnie jedna taka funkcja $h : Z \to E$, że

$$h(\varphi(x)) = 2h(x), \ h(x) - f(x) \in W \ (x \in Z). \tag{7}$$

Dowód. Wybierzmy tak $\varepsilon \geq 0$, żeby

$$W \subseteq K(\varepsilon) := \{x | x \in E, \ \|x\| \leq \varepsilon\}. \tag{8}$$

(6) implikuje $\|f(\varphi(x)) - 2f(x)\| \leq \varepsilon \ (x \in Z)$, a stosując zasadę indukcji matematycznej z łatwością otrzymujemy

$$\|f(\varphi^n(x)) - 2^n f(x)\| \leq (2^n - 1)\varepsilon \ (x \in Z; n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Tak więc (2) zachodzi dla $\eta = -\varepsilon$. Możemy zatem zastosować twierdzenie 1 i dostajemy (dokładnie jedną) taką funkcję $h : Z \to E$, że

$$h(\varphi(x)) = 2h(x), \ h(x) - f(x) \in K(\varepsilon) \ (x \in Z).$$

Funkcja ta dana jest wzorem (3). Zgodnie z (6), dla $x \in Z$ mamy

$$\begin{aligned} d_1(x) &:= f(\varphi(x)) - 2f(x) \in W, \\ d_2(x) &:= f(\varphi^2(x)) - 2f(\varphi(x)) \in W, \\ d_3(x) &:= f(\varphi^3(x)) - 2f(\varphi^2(x)) \in W \text{ itd.} \end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem

$$h(x) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x) \in W$$

i tym samym (7) jest w pełni wykazane.

3. Działania kwadratowo symetryczne. Mając dane (dowolne) działanie $\circ : Z \times Z \to Z$ załóżmy, że nasza funkcja $\varphi : Z \to Z$ dana jest wzorem

$$\varphi(x) = x^2 := x \circ x \ (x \in Z).$$

Równanie (1) ma teraz postać

$$f(x^2) = 2f(x) \ (x \in Z).$$

Dla $x \in Z$ określamy indukcyjnie potęgi x^{2^n} $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ przyjmując $x^{2^{n+1}} = (x^{2^n})^2$ $(n \geq 1)$. Tym samym $\varphi^n(x) = x^{2^n}$ i wobec tego (2) przybiera postać

$$\|f(x^{2^n}) - 2^n f(x)\| \leq 2^n\varepsilon + \eta \ \ (x \in Z; n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{9}$$

a (3) to

$$h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} f(x^{2^n}) \ (x \in Z). \tag{10}$$

Załóżmy teraz, że $\circ$ jest działaniem *kwadratowo symetrycznym* (por. [8]), tzn.

$$(x \circ y) \circ (x \circ y) = (x \circ x) \circ (y \circ y) \ (x, y \in Z),$$

czy też krótko

$$(x \circ y)^2 = x^2 \circ y^2 \ (x, y \in Z). \tag{11}$$

Użyteczność tej własności w problematyce stabilnościowej znana jest z pracy Fortiego [3] (por. też pracę Borelli i Fortiego [2]). Zauważmy, że (11) pociąga

$$(x \circ y)^{2^n} = x^{2^n} \circ y^{2^n} \ (x, y \in Z;\ n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{12}$$

Z twierdzenia 1 jako prosty wniosek otrzymujemy zatem równoważność następujących dwóch warunków (dla danej funkcji $f : Z \to E$ i liczby $\varepsilon \geq 0$):

(P$'$) $f = h + r$, gdzie $h(x \circ y) = h(x) + h(y)$, $\|r(x)\| \leq \varepsilon$ $(x, y \in Z)$.

(Q$'$) Istnieją takie liczby rzeczywiste δ, η, że zachodzi (9) oraz

$$\|f(x \circ y) - f(x) - f(y)\| \leq \delta \ (x, y \in Z). \tag{13}$$

(Tę równoważność (P$'$) $\iff$ (Q$'$) można znaleźć też w [12]; implikacja (P$'$) $\implies$ (Q$'$) nie wymaga kwadratowej symetryczności (11). Przedstawione poniżej rozumowanie pokazuje, że (13) pociąga równość $h(x \circ y) = h(x) + h(y)$.)

Ciekawiej jest popatrzeć na twierdzenie 2: warunek (6) oznacza teraz, że $f(x^2) - 2f(x) \in W$ $(x \in Z)$. Zastąpmy go przez

$$f(x \circ y) - f(x) - f(y) \in W \ (x, y \in Z). \tag{14}$$

Dla liczby ε spełniającej (8) mamy

$$\|f(x \circ y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon \ (x, y \in Z),$$

a zastępując x, y przez x^{2^n}, y^{2^n}, zgodnie z (12) otrzymujemy

$$\|f((x \circ y)^{2^n}) - f(x^{2^n}) - f(y^{2^n})\| \leq \varepsilon. \tag{15}$$

Dzieląc tę nierówność przez 2^n i uwzględniając (10), dostajemy

$$h(x \circ y) = h(x) + h(y) \ (x, y \in Z). \tag{16}$$

Konkluzja. *Jeżeli w twierdzeniu 2 warunek* (6) *zastąpimy przez* (14), *gdzie* $\circ : Z \times Z \to Z$ *jest działaniem kwadratowo symetrycznym, to w* (7) *równość* $h(\varphi(x)) = 2h(x)$ *można zastąpić przez* (16).

Ta wersja twierdzenia 2 podana jest w [13]. Przypomnijmy także uwagę Józefa Tabora [11]: Aby otrzymać (16) z (14), założenie kwadratowej symetryczności można osłabić; wystarczy zażądać co następuje:

(T) *Dla* $x, y \in Z$ *istnieje przynajmniej jedna taka liczba całkowita* $n \geq 1$, *że*

$$(x \circ y)^{2^n} = x^{2^n} \circ y^{2^n}.$$

Wówczas bowiem

$$(x \circ y)^{2^{n_k}} = x^{2^{n_k}} \circ y^{2^{n_k}}$$

dla pewnego (zależnego od x, y) ciągu $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots \to \infty$. Mamy (15) dla $n = n_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, dzielimy przez 2^{n_k}, przechodzimy do granicy, gdy $k \to \infty$ i dostajemy (16). Mamy więc uogólnienie - w sensie uwagi Józefa Tabora [11] - twierdzenia stabilnościowego Jacka Tabora [10]:

Twierdzenie 3. *Niech* W *będzie ograniczonym i idealnie wypukłym podzbiorem przestrzeni* E, *a* $\circ : Z \times Z \to Z$ *niech spełnia warunek* (T). *Załóżmy też* (14) *o funkcji* $f : Z \to E$, *tj.*

$$f(x \circ y) - f(x) - f(y) \in W \ (x, y \in Z).$$

Istnieje wówczas dokładnie jedna taka funkcja $h : Z \to E$, *że*

$$h(x \circ y) = h(x) + h(y), \ h(x) - f(x) \in W \ (x, y \in Z).$$

Zauważmy, że także do otrzymania równoważności (P′) oraz (Q′) założenie (11) można zastąpić przez (T).

4. O równaniu funkcyjnym $f(\varphi(x)) = \omega f(x)$. Odnośnie równania

$$f(\varphi(x)) = \omega f(x) \ (x \in Z),$$

gdzie $\omega > 1$, twierdzenie 1 pozostaje w mocy, gdy w warunku (P) równanie, które spełniać ma funkcja h, zastąpimy przez $h(\varphi(x)) = \omega h(x)$, a nierówność (2) przez

$$\|f(\varphi^n(x)) - \omega^n f(x)\| \leq \omega^n \varepsilon + \eta \ (x \in Z; \ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Twierdzenie 2 jest słuszne dla $\omega > 2$, jeśli tylko w (6), (7) liczbę 2 zastąpimy przez ω i zażądamy dodatkowo, że $0 \in W$.

Literatura

[1] Karol BARON i Peter VOLKMANN: *On functions close to homomorphisms between square symmetric structures.* Maszynopis.

[2] Costanza BORELLI i Gian Luigi FORTI: *On a general Hyers-Ulam stability result.* Internat. J. Math. Math. Sci. **18**, 229-236 (1995).

[3] Gian Luigi FORTI: *An existence and stability theorem for a class of functional equations.* Stochastica **4**, 23-30 (1980).

[4] —: *The stability of homomorphisms and amenability, with applications to functional equations.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **57**, 215-226 (1987).

[5] Roman GER i Peter VOLKMANN: *On sums of linear and bounded mappings.* Ibid. **68**, 103-108 (1998).

[6] Donald H. HYERS: *On the stability of the linear functional equation.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **27**, 222-224 (1941).

[7] E. A. LIFŠIC: *Ideal'no vypukle množestva.* Funkcional'. Analiz Priložen. **4**, No. 4, 76-77 (1970).

[8] Zsolt PÁLES, Peter VOLKMANN i R. Duncan LUCE: *Hyers-Ulam stability of functional equations with a square-symmetric operation.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **95**, 12772-12775 (1998).

[9] György PÓLYA i Gábor SZEGŐ: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, I.* Springer Berlin 1925.

[10] Jacek TABOR: *Ideally convex sets and Hyers theorem.* Funkcialaj Ekvac. **43**, 121-125 (2000).

[11] Józef TABOR: *Remark 18* (podczas konferencji z równań funkcyjnych w Oberwolfach, 1984 r.). Aequationes Math. **29**, 96 (1985).

[12] Peter VOLKMANN: *On the stability of the Cauchy equation.* Proceedings of the Numbers, Functions, Equations '98 International Conference, pod redakcją Zsolta Pálesa, Janus Pannonius Tudományegyetem Pécs, 105-151 (1998).

[13] —: *Zur Rolle der ideal konvexen Mengen bei der Stabilität der Cauchyschen Funktionalgleichung.* Sem. LV, http://www.mathematik.uni-karlsruhe .de/~semlv, No. 6, 6 pp. (1999).

Maszynopis: Marion Ewald.

Adres autora: Mathematisches Institut I, Universität Karlsruhe, 76128 Karlsruhe, Niemcy.